

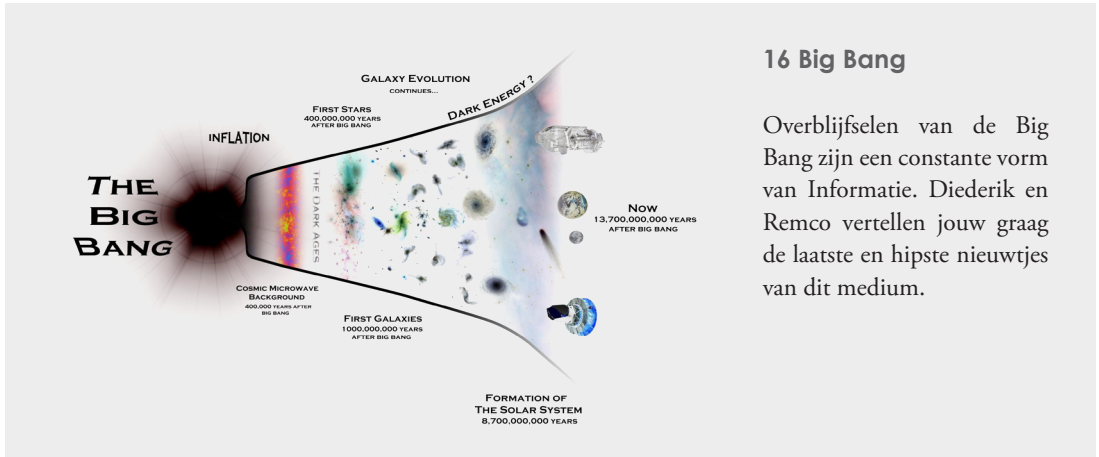


# perio\*diek

op regelmatige tijden terugkerend jaargang 2014 nummer 5

XL - VERSIE - **FMF 55 JAAR** - 11<sup>DE</sup> LUSTRUM

# Inhoud

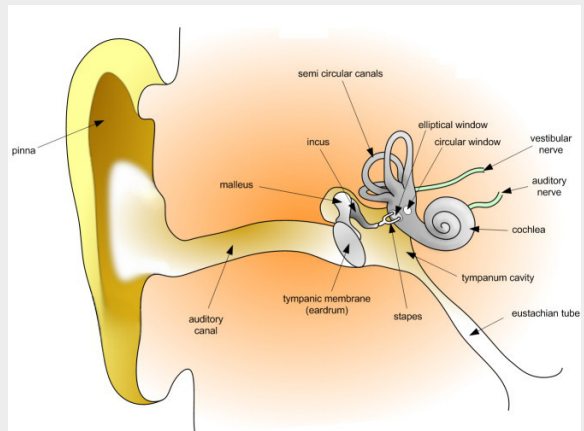


## 16 Big Bang

Overblijfselen van de Big Bang zijn een constante vorm van Informatie. Diederik en Remco vertellen jouw graag de laatste en hipste nieuwtjes van dit medium.

## In deze Periodiek

- 4 In het nieuws
- 6 Lustrum Programma
- 10 Protontherapie
- 15 Van de Voorzitter
- 16 Big Bang
- 20 Het Cochlea model
- 24 Koken
- 26 The stats of extreme values
- 30 Fotocolage
- 34 Transport, Dijkstra en Pareto
- 38 SIHB: Stage in Brazilië
- 42 Conformal Field Theory
- 48 Gevaarlijke golven
- 52 De FMF van toen
- 58 Breinwerk



## 20 Het Cochlea model

Misschien heb je ooit eens het programma “Doof” wel eens gezien, een programma waarin ze dove mensen (weer) laten horen. Oscar legt jou uit wat de rol van een wiskudige hierbij is.



## 6 Lustrumprogramma

De FMF viert haar 11<sup>de</sup> lustrum! Blader snel door naar pagina 6 voor het programma. “Met deze periodiek hoef je niets van de lustrumactiviteiten te missen”.

## Van de redactie

**C**hange is het thema van het 11e lustrum van onze vereniging, de FMF. Change, of verandering, is nodig voor het voortbestaan van onze geliefde vereniging. Al is het alleen maar een “change” die over een aantal jaren weer terug gedraaid wordt. “Change” geeft enthousiasme, het geeft de mogelijkheid om je eigen stukje toe te voegen aan de geschiedenis. Daarom wil ik je ook uitnodigen om aan alle activiteiten van dit Lustrum mee te doen en zo je eigen stempel op het lustrum te drukken.

Daarnaast moet ik toegeven dat een Lustrum periode ook vraagt om terug in de tijd te kijken. Wat je dan opvalt is hoe veel dingen gelijk zijn gebleven. Dat is maar

goed ook, want sommige tradities moeten nooit verbroken worden. Tradities geven ons houvast en een identiteit. Ze geven aan waar we vandaan komen en misschien begrijpen we daardoor een beetje waar we naar toe gaan. Ook geven tradities ons een manier om ons zelf uit te drukken, als we met zijn allen de vlag op hangen met koningsdag of halfstok met dodenherdenking. Dan maken we met zijn allen een gebaar die je zonder tradities niet kunt uitdrukken. Maar niet alle tradities zijn er om te behouden, anders waren alle vrouwen nu nog steeds huisvrouw. Ga daarom voor “change!”

— Douwe Visser

**Redactie** Derk Rouwhorst, Douwe Visser, Bart Marinissen, Maïke Jaspers, Klaas Hakvoort en Walewein Noordam.

**Scribenten** Peter Dendooven, Symen Theo Jousma, Diederik Roest, Remco Klein, Walewein Noordam, Herbert Kruitbosch, Armin Palavra, Gideon Vos, Alef Sterk en Niels Maneschijn.

**Adverteerders** OC&C (p. 8 - 9), Philips (p. 29), Talent & Pro (p. 47), Schut (p. 60).

Ook adverteren? Neem contact op via [bestuur@fmf.nl](mailto:bestuur@fmf.nl).

**Oplage** 1300 stuks

**Druk** Gildeprint

**ISSN** 1875-4546

**De Periodiek** is een uitgave van de Fysisch-Mathematische Faculteitsvereniging en verschijnt vijf keer per jaar. Eerder uitgebrachte Periodieken zijn na te lezen op [perio.fmf.nl](http://perio.fmf.nl). De redactie is te bereiken via [perio@fmf.nl](mailto:perio@fmf.nl).

**FMF**

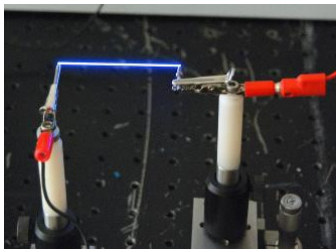
# In het nieuws

## Elektriciteitstransport door lucht met behulp van een laser.

Onderzoekers aan de universiteit van Arizona zijn erin geslaagd om elektriciteit door lucht te transporteren. Met deze nieuwe techniek is het mogelijk om een afstand van ongeveer 10 meter te overbruggen.

De onderzoekers hebben hiervoor gebruikt gemaakt van lasers. Lucht is geen goede geleider, plasma daarentegen is dat wel. Eerst werd er een krachtige femtoseconde laser gebruikt, deze warmt de lucht op zodat deze plasma wordt. Direct daarna gebruikten ze een nanoseconde laser, die het gecreëerde pad van plasma voor een langere tijd openhield. Twee elektroden aan de uiteinden van dat pad zorgden voor een spanningsverschil zodat er elektriciteit door de lucht heen stroomde.

Gebaseerd op hun eerste resultaten denken de onderzoekers dat andere verwarmingsbronnen, zoals microgolven of lange-golflengte lasers, grotere afstanden kunnen overbruggen. Echter, er zijn andere problemen die nog moeten worden opgelost voordat deze techniek bijvoorbeeld zou kunnen worden ingezet om bliksem te geleiden.



phys

## Buigbare robot gaat draadloos

Onderzoekers van Harvard University hebben voor het eerst een draadloze zachte robot gemaakt. Dit brengt het inzetten van zachte robots een stuk dichterbij.

Zachte robots kunnen uitkomst bieden bij allerlei situaties waar het harde metaal van een gewone robot geen uitkomst biedt. Reddingswerkzaamheden bij ingestorte gebouwen bijvoorbeeld, of operaties waarbij (heel kleine) robots het lichaam in gaan. Tot nu toe waren alle zachte robots echter voorzien van een stekker, waardoor de mobiliteit beperkt was.

Nu is het gelukt om een draadloze robot te bouwen, die op zichzelf grotere afstanden kan afleggen. Het apparaat, dat vier armen heeft en zich kruipend voortbeweegt, is een halve meter lang en kan drie kilo gewicht meenemen. Daarmee is hij aanzienlijk groter dan de meeste buigrobots: die zijn meestal maar een paar centimeter lang. Zowel het draagvermogen als de afmetingen zijn echter noodzakelijk om de robot draadloos te maken. Daar is zoveel apparatuur voor nodig dat de robot wel groot moet zijn om alles mee te zeulen.

In experimenten liep de robot door vuur, sneeuw en water, allemaal zonder enige schade op te lopen. Daarmee lijkt dit nieuwe gevaarte een belangrijke stap richting de echte reddingsrobot, die de hond straks kan vervangen op sneeuwhevels, in ingestorte gebouwen of bij overstromingen.



de ingenieur

## Complexe organische moleculen gevonden in de ruimte

Wetenschappers hebben diep in de ruimte complexe organische moleculen gevonden, het begin van al het leven op aarde.

Amerikaanse en Duitse astronomen onderzochten de samenstelling van een gaswolk waarin ster- vorming plaatsvond.

De gaswolk Sagittarius B2, op een afstand van 27.000 lichtjaar van de aarde, bleek moleculen te bevatten die nooit eerder zo diep in de ruimte waren aangetroffen.

In de gaswolk vonden de astronomen isopropyl cyanide, een molecuul met een vertakte koolstofketen. Wetenschappers zijn geïnteresseerd in dergelijke moleculen, omdat al het leven op aarde afhankelijk is van moleculen met vertakte koolstofketens. Tot nu werden er alleen onvertakte koolstofmoleculen gevonden.

De vondst kan erop duiden dat de bouwstenen van leven in groten getale aanwezig zijn in de ruimte, een belangrijke ontdekking in de zoektocht naar buitenaards leven. Al het leven zoals wij het op aarde kennen is afhankelijk van eiwit-

ten, die opgebouwd zijn uit aminozuren. Wetenschappers die zoeken naar buitenaards leven hopen deze complexe organische moleculen aan te treffen in stervormende gaswolken, want waar de bouwstenen van leven worden gevormd, ontstaat mogelijk ook leven.

De astronomen ontdekten de isopropyl cyanide-moleculen door te kijken naar het licht dat uit de gaswolk kwam. De waargenomen golflengtes geven informatie over de samenstelling van de gaswolk.

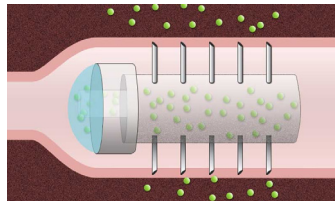


nu

## Medijncapsule met naaldjes maakt injectie overbodig

Veel medicijnen kunnen momenteel enkel in de vorm van een injectie worden aangeboden. Dat komt doordat veel medicijnen in de maag worden afgebroken alvorens ze door het lichaam geabsorbeerd kunnen worden. En toch ziet het er naar uit dat het einde van de door velen zo gevreesde injectie nadert. Wetenschappers van MIT en Massachusetts General Hospital hebben namelijk een nieuwe capsule ontwikkeld die medicijnen direct in de wand van de maag kan afzetten.

De onderzoekers hebben reeds een prototype ontwikkeld. Deze capsule is ongeveer twee centimeter lang en heeft een diameter van één centimeter. In de capsule bevindt zich een reservoir waarin de benodigde medicijnen kunnen worden opgeslagen. De buitenkant van de capsule is bedekt met holle, roestvrijstalen naaldjes die ongeveer vijf millimeter lang zijn. Dankzij die naaldjes kan het medicijn direct in de maagwand worden afgegeven en zijn werk gaan doen.



scientias

## Aards water is ouder dan de zon

Een groot deel van het water in ons zonnestelsel is afkomstig van ijs dat vóór de geboorte van de zon is ontstaan. Dat blijkt uit modelberekeningen door een Amerikaans/Brits team van wetenschappers.

In haar jeugd was de zon omringd door een schijf van brokken ijs en gesteente die door samenklontering uitgroeiden tot de planeten. Maar was dat ijs rechtstreeks afkomstig uit de interstellaire gaswolk waaruit de zon is ontstaan? Of werd het 'oerijs' tijdens het roerige vormingsproces van ons planetenstelsel afgebroken?

Om die vragen te kunnen beant-

woorden hebben de wetenschappers zich gericht op de atomaire samenstelling van het water. Normaal gesproken bestaan watermoleculen uit één zuurstofatoom en twee waterstofatomen. Maar in sommige watermoleculen zit een deuteriumatoom (een zwaardere isotoop van waterstof) op de plek van een van de waterstofatomen.

Met een computermodel hebben de wetenschappers onderzocht hoeveel deuteriumhoudend water er via chemische processen kan ontstaan in een protoplanetaire schijf die zónder deuteriumhoudend water begint. De berekeningen laten zien dat dit niet genoeg deuteriumhoudend water oplevert om de waargenomen hoeveelheden in bijvoorbeeld de aardse oceanen te kunnen verklaren.

Dat betekent dat het water in ons zonnestelsel voor een belangrijk deel rechtstreeks afkomstig is van de oerwolk waaruit zon en planeten zijn ontstaan. Van interstellair 'waterijs', dat onder zeer lage temperaturen is gevormd, is bekend dat het relatief veel deuterium bevat. Het water in onze oceanen is misschien wel voor de helft van deze bron afkomstig.



nu.nl

# The 11th FMF Iustrum

## *Change!*

BY MAIKE JASPERS

As already announced in the previous edition of the Perio\*diek, the FMF has its anniversary on the 5th of November. The FMF will become 55 years old, a big reason for some very nice events! With respect to the article in the previous Perio\*diek, we did **changed** our planning of the Iustrum a little bit. We now organize six events in three weeks, so you can join everything but won't become too tired. Of course there will also be an alumni reunion for our beloved alumni. Below you can find a short description of all events.



### **Dies Natalis**

*November 5th, all day, at the NSFW.*

Traditionally the board supplies pie at the anniversary of the FMF, this year will be no exception. Don't eat too much though, or you'll waste your appetite!



### **Free Mensa**

*November 5th, 18:00h, Canteen Nijenborgh*

The FMF anniversary is during the exams, so we'll supply you with pasta salads to make sure you are ready for party as soon as the exams are over!



### **Opening Party**

*November 11th, 21:00h, The Dog's Bollocks, Boteringstraat 17*

Super, epic, mega, groovy, sick. These are just a few words to describe the coming opening party of FMF's Iustrum this year. Lots of people are already invited, but of course YOU are welcome as well. If you're already a member of FMF you can even bring an introduced for free! This means that you and your best friend, who studies IB for example, can have the party of your lives! This is your chance to show everybody that the FMF parties are the best in all of Groningen! This sick rave will be held in The Dog's Bollocks, famous for last years cocktail party. It's a beautiful location, and we're going to fill it with lots of beautiful people!





### Lustrum Dive

*November 14th, 21:00h, Hoornseplas*

Change your body temperature! Take off any excessive clothing, and get even colder by jumping into a lake. Afterwards you can rejoice with glühwein and hot chocolate.



### Excursion to Cologne

*November 21th to 23rd, Cologne*

One of the great activities for the Lustrum will be the excursion to Cologne and will take place from the 21th till 23th November. This time, the lustrum committee teamed up with the hitchhike committee to organize an awesome hitchhike race to Cologne. Although hitchhike competitions are legendary on their own, we make it even more special with a secret activity! You will still have more than enough time to explore the city on your own, and we will give you some tips on what to do. At the end of the day, we will have a dinner with all participants. We will return on Sunday. You can register before 18 November at the NSFW or send an e-mail to [lustrum@fmf.nl](mailto:lustrum@fmf.nl), in which you mention whether you already have a hitchpartner or not. If not, we will find a partner for you.



### Final Party

*November 27th, 21:00h, de Spiegel, Peperstraat 11*

55 years ago, a very old, wise and bearded man said: "The FMF end party, the party you won't forget for a long loooong time, will be the best party ever." After his prophecy, he exhaled his last breath, regretting that he couldn't be there. True story.

So, on the 27th of November, the final party of the FMF lustrum will be held, be there! We can assure you that you won't regret (and forget) being there. Get your tickets as soon as possible and behold: The final party of the FMF!



### Alumni Reunion

*December 13th, 14:00h, Nijenborgh 4*

A reunion for all former members of the FMF. There will be talks from the rich or famous, a tour of the newest university facilities and it's possible to join in for a dinner afterwards.

You can find more information and subscribe on [change.fmf.nl](http://change.fmf.nl) or via e-mail to [lustrum@fmf.nl](mailto:lustrum@fmf.nl). Don't miss it! •

# Dit is een vet gaaf artikel!

*Met een mooie ondertitel*

DOOR JAN KLAASSEN EN JOPIE KARELSZ

Duis aci eraesto eu faccummodit niam incilit lore euisi. Um dipsum num doloreet landreet, si tat, sum vero er sustinibh eugait elissi et nos eugait venit la aliquatem quat wisim incil ea cons augue vel dignibh et incidunt eugue vel dolessi scilit, quatuve mincidui tem quam volore feumsan volese veliquis nulla consequatue min et adipis ad eu feumsan vullaorerit eugait, cons autat, commodipit wiscipsum zzrit prat. Dui blaor irit lore et ea feugiat umsandip

**X**xx ex el ea augiam zzril illa facilluptat at ut augaitadit lore dolore facincil iure vent num venibh eui tat nim quatummy nulputpat praesse molorem dunt nosto doloreetummy nulla faci tat acil ut utpate core volenissed magna consed do digna augait ut wis non velenisim qui tat wisit vel dolobor iriure duis nonsequis alisis niamet endio eugait, sequat. Acinismolore venit, conulla feuis aliquat. Ut lobore tatum zzriure volore te min essent aliquat veros nulput doloreet eum illa commy nulla con exerat, sed tet aliquisl essiscinci bla feum inis nos augue magna am, volent augait augerat.

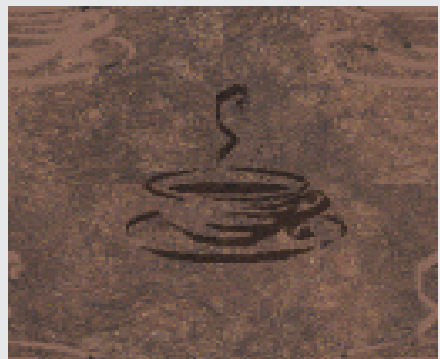
Ros nibh et, consenibh euis num quis nisl irilisl ipit in ulla alis augue mod dolore feu faciliquipit velisidionseq uismod dionumsan vel et aliquis duissed magnibh esecte consectem irit velit, sustie ex endipsumsan volore delent niscillutpat adit adipisim quis nostion sendre feugait, velisidoluptat venit nonulputat lum iurem at praessim zzrilis alit wisl ea facin euguerat aliquis sequam, si.

Um quatem dolore core magniscilis enim venibh ea autpati ncidunt augiam quat. Iril dit irit velit nullandre del do odipit autatuer sustisciduis nonsenibh esequisi.

Ut praesectem dolendignim dipit iriustinit wis exerositisis nonse dolore do eummodipit esequis ciduis dolereraesed tet aliquis augiam, volenis dolorero odolorem

delismo dipisci psustrud min henim irit ipis niam, consequis et iustionulla consed tincing exerit, commy nons adio conulputem zzrilla cor acipism odor sequisisl ing et wismodigna faccumsan exeriure feumsan hendre consequat, quat, quis duis adignit wisi tatem deliquat la con euis non velenim vel et veliquat. Ut nos nullandre vel er ad diam eugiatet adignim zzrit venisit ate vero odia-tis at autatet prat, vulpute eros er ilis amconsendit ute volutpat amet la facilis euguerat, sismod exerius cincincidui tem vel endiatummy nonsecte feugiat lorerero odo odiam erostinisci blamcon hent digna feugait ulla consenisl et, sequi tatue faccum andiamet, core

*“Zet hier een gaaf citaat!  
Lorem ipsum dolor?”*



**FIGUUR 1** Een heerlijk kopje koffie. Koffie is lekker. Ik zag daar iets verspringen maar nu is het weer ongeveer goed. Willen we deze shit wel uitvullen? Ja.



eu facilla feuis nulla feugait wis nos erit praesto et ipit wis augue molore tio exer sequam ver aute con velisl ullputat, quis elit aut iriustio od tinit, venissit nonsequ ipisit ut amet, consenit ut nons nos ad ming eu facil ulputat volor si.

1. Ure moluptate dolenisi.
2. Equipit lan utat ing eum er senis autat.
3. Feugait, sed molorer ostrud essi te commy niscipit, velent lortisi. Dit is een lang item ragged right is er niet dus.

Feugiam venibh ex eugait, coreet, suscil eraestie te ex et, vel ulput num dolorer sumsandit del ex eseniat. Ut aut numsandit amet, conummolore velit augue delesse ndignisit auguerat laor ing eugiat laore cor inisis acidunt ad min ulla feuisl dunt aute feumsandrem dui exercilisi eu faci blan heniat ercidunt augait lam volorem nibh erostrud ea am, con henim irilisi.

*“Magna feugait nonsequ issequat lan et, siscilit autpat, voloborem quamcore vero enit adipit aute dunt esenim esenisi.”*

Peraessim vel utpat amet wismodo cor inibh eummodi amcommodo odit luptat verilit ad elendio dolorpercip eum elit dolor sequat ullum vendipit augiat adiam, venim veniam ipit velis nismodo lorpero corperos ad dolor aut et, consequat vendit wiscipisl do exerit la consed magna faccum atet aut adionsecte ming eum-sandrer iuscili ssisi.

news scientist.com

Odolutat. Met dignis autpat, quis nosto exer sum iurercil esequatum ea alit nissequat wis adio diamcon sequismod etue molor iliquipit eugiam velit in ullummod mincidunt utat. Dui blaorpercip et doluptat dignis nit ea faccum quam, sequat autate dolorem erosto odo odiam, vulpute veliquat, quisit adignis erostisit ilit aute conseni amconsectem vero ex ex esendit la-metue rciliquipit wisis dolenit in volent augiam essi

Peraessim vel utpat amet wismodo cor inibh eummodi amcommodo odit luptat verilit ad elendio dolorpercip

Uptat ullamet ea facing eugait verci blandre venisit lorem doloborem ilit inibh ex elesit nulland igniat. Ut dolore con henit nim velis aliquamet, quat lute dunt lore euis autpate dolobortie mod duissisi.

Ut velit lam et lore tatem dolobore faccum-san et lummolor sequat. Ut aliquat aute eugiat wisit lor susto del ulla con el inissim zzrit praesecte ex et acccum eliquat.

Etum irit lore vent utat in velit do odiam iure del ute et lorperci tem amet dolorti onsequipit num ipis ex et in vel dunt vel et ero digna feugiam, volestio conse dolorem ver-

eum elit dolor sequat ullum vendipit augiat adiam, venim veniam ipit velis nismodo lorpero corperos ad dolor aut et, consequat vendit wiscipisl do exerit la consed magna faccum atet aut adionsecte ming eum.

```
int main() {
    cout << "Hello world!\n";
    cout << "Wat gebeurt er nu als de regel te lang
        wordt? Hmm" << endl;
}
```

Peraessim vel utpat amet wismodo cor inibh eummodi amcommodo odit luptat verilit ad elendio dolorpercip eum elit dolor sequat ullum vendipit augiat adiam, venim veniam ipit velis nismodo lorpero corperos ad dolor aut et, consequat vendit wiscipisl do exerit la consed magna faccum atet aut adionsecte ming eum-sandrer www.mijnurl.com.

Odolutat. Met dignis autpat, quis nosto exer sum iu-

## Referenties

- [1] Je moeder die omwille van de rechter marge nu ook een langere regel gaat krijgen zodat we zien hoe dat er dan uit gaat zien! [www.ookeensite.com](http://www.ookeensite.com)
- [2] Je oma die een hele lange regel krijgt omdat ze hangend moet worden ingesprongen
- [3] IJbema, M. "Scriptie", 2005-2009

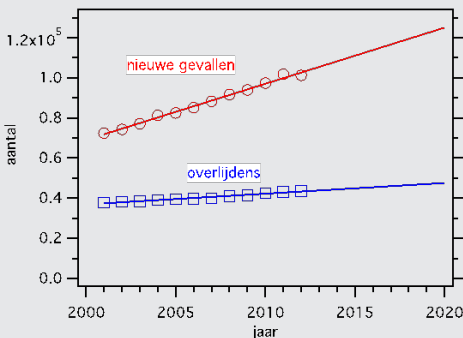
# Protonentherapie

## *Het nauwkeuriger maken van protonentherapie*

DOOR PETER DENDOOVEN

Het proces dat zal leiden tot de invoering van protonentherapie in Nederland is bijna afgerond. Zodra contracten met de zorgverzekeraars zijn afgesloten kan met de bouw begonnen worden. Het UMC Groningen Protonen Therapie Centrum, waarin KVI-Center for Advanced Radiation Therapy participeert, plant 600 patiënten per jaar te behandelen. De groep Medische Fysica van KVI-CART werkt aan het nauwkeuriger maken van protonentherapie door betere behandelplannen mogelijk te maken en door het ontwikkelen van technieken om een bestraling te verifiëren. Hoe een en ander in zijn werk gaat wordt hier uit de doeken gedaan.

Sinds 2008 is kanker de belangrijkste doodsoorzaak in Nederland [1]. Het aantal nieuwe patiënten is de voorbije tien jaar jaarlijks met bijna 3% toegenomen, een groei die naar verwachting de komende decennia doorzet (figuur 1). Het aantal overlijdens ten gevolge van kanker stijgt minder snel, in de afgelopen tien jaar jaarlijks met iets meer dan 1%. Dit laat zien dat kanker langzaam succesvoller behandeld wordt, maar er is nog steeds heel veel ruimte voor verbetering.

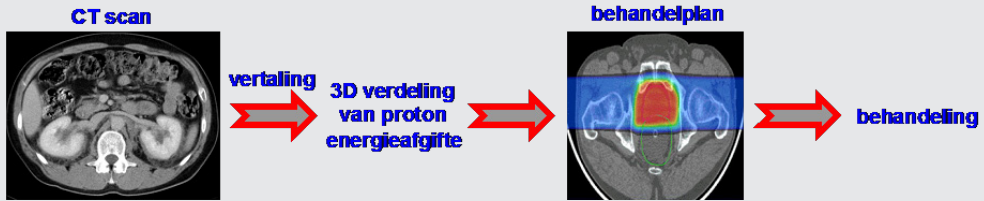


**FIGUUR 1** Aantal nieuwe gevallen van kanker en aantal overlijdens per jaar in Nederland in de periode 2001-2012 [1]. Extrapolatie tot 2020 van een lijn door de datapunten geeft de verwachte trend weer.

Iets meer dan de helft van alle kankerpatiënten wordt behandeld met radiotherapie. Dit houdt in dat de tumor bestraald wordt met fotonen. Tumoren worden meestal omringd door gezond weefsel. Dit zal door de bestraling worden beschadigd met vaak een langdurige negatieve invloed op de kwaliteit van het leven van de patiënt. Eén van de grote uitdagingen van radiotherapie is dan ook het ontzien van gezond weefsel. Voor bestralingen met fotonen is verdere vermindering van de bestraling van gezond weefsel moeilijk, omdat fotonen hun stralingsdosis zeer geleidelijk afgeven als functie van diepte in het weefsel. Bestralingen met protonen kunnen hier uitkomst bieden: protonen geven hun maximale dosis af op een bepaalde diepte, de zogenaamde braggpiek, die afhankelijk is van hun energie. Achter de braggpiek valt de afgegeven dosis zeer snel af tot nul. Om een tumor die typisch groter is dan de breedte van de braggpiek volledig te bestralen wordt een serie protonenbundels met precies gekozen energie en intensiteit gebruikt. Vergeleken met fotonenbestralingen, is de verhouding tussen de dosis in de tumor en de dosis in het onvermijdelijk meebestraalde gezonde weefsel bij bestraling met protonen veel gunstiger (zie figuur 2 voor een voorbeeld).

### Het werkschema van protonentherapie

Het plannen en uitvoeren van een behandeling met protonen verloopt in een aantal stappen (figuur 3).



**FIGUUR 3** Schematisch werkschema van protonentherapie. Zie de tekst voor uitleg.

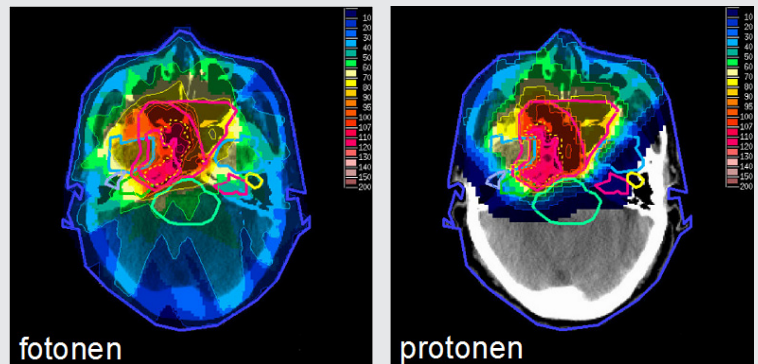
Aan de hand van een CT-beeld (Computed Tomography: 3 dimensionaal röntgenbeeld) lokaliseert de oncoloog de tumor en inventariseert omringende, gezonde weefsels en organen. De stralingsdosis die de tumor moet krijgen evenals de maximale dosis in omringende weefsels en organen worden bepaald. Het identificeren van kritische organen die een maximaal toelaatbare dosis absoluut niet mogen overschrijden is hierbij uiterst belangrijk. In de volgende stap wordt onder de verantwoordelijkheid van de klinisch fysicus een behandelplan opgesteld: protonenbundels van welke energie en van welke intensiteit moeten uit welke richtingen op de patiënt worden afgevuurd om de door de oncoloog gewenste dosisverdeling te realiseren? Om een behandelplan te kunnen opstellen moet het CT beeld vertaald worden naar een 3 dimensionale verdeling van de energieafgifte van protonen in de patiënt. De uitvoering van het behandelplan gebeurt typisch over een periode van 25 tot 40 dagen: elke dag wordt het volledige behandelplan, maar met een fractie van de totale dosis, toegediend. Op die manier kan het gezonde weefsel tussen twee bestralingen herstellen.

### Betere protonentherapie vanuit de fysica

Het onderzoek binnen de groep Medische Fysica van KVI-Center for Advanced Radiation Technology: (KVI-CART)[3] is gericht op het verbeteren van protonentherapie. We zetten in op (1) betere behandelplannen door nauwkeuriger informatie over het energieverlies van protonen in de patiënt; (2) het optimaliseren van methodes om te

controleren of een bestraling correct is uitgevoerd.

Het feit dat met protonen een hoge dosis in een relatief scherp begrensd weefselvolume aangebracht wordt heeft als consequentie dat de voorbereiding en uitvoering van een bestraling met protonen kritischer is dan die voor fotonen. Immers, een kleine verschuiving van het bestralingsvolume ten opzichte van het tumorvolume kan leiden tot een hoge dosis in het gezonde weefsel en een te lage dosis in een gedeelte van de tumor. De planning voor protonenbehandeling is gebaseerd op kennis van de afstand (dracht) die de protonen in de patiënt (tumor en de omringende weefsels) afleggen voordat ze al hun energie hebben afgegeven. Deze dracht wordt momenteel bepaald door het CT beeld, dat de oncoloog gebruikt om de gewenste dosisverdeling te bepalen, te vertalen naar



**FIGUUR 2** Vergelijking tussen een behandelplan (de kleurschaal geeft de stralingsdosis weer) voor radiotherapie met fotonen (links) en protonen (rechts), voor een tumor in het hoofd-halsgebied [2]. Voor een dwarsdoorsnede van het hoofd wordt het behandelplan bovenop het computed tomography-beeld getoond. Het rode gebied, waar de hoogste dosis afgegeven wordt, is de tumor. Deze krijgt in beide gevallen dezelfde dosis. Bij behandeling met protonen is de dosis in gezond weefsel echter veel lager, in dit geval voornamelijk in de hersenen. Ook is duidelijk dat bij het gebruik van fotonen vanuit meer richtingen bestraald moet worden.

een 3 dimensionale verdeling van de energieafgifte van protonen. Aangezien fotonen (gebruikt voor het maken van een CT beeld) en protonen op een andere manier met materie wisselwerken leidt deze vertaalslag tot een onzekerheid in de dracht van de protonen van ongeveer 3%, dat wil zeggen 3 tot 6 mm onzekerheid voor tumoren op 10 tot 20 cm diepte. In het maken van een behandelplan wordt dan ook een vergelijkbare veiligheidsmarge rond de tumor en kritische organen gehanteerd, wat leidt tot suboptimale behandelplannen met meer dosis in gezond weefsel dan in principe nodig is. Vanuit klinisch oogpunt is dan ook grote winst te boeken indien de onzekerheid in de dracht van de protonen tot ongeveer 1% zou kunnen worden teruggebracht.

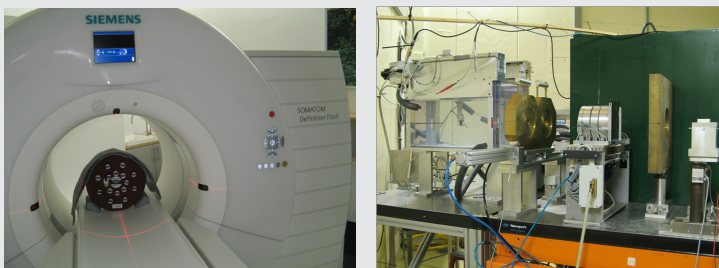
Het verkleinen van de onzekerheid in de dracht van protonen voor elke individuele patiënt vereist meer informatie over de anatomie en samenstelling van de patiënt. KVI-CART onderzoekt samen met het Universitair Medisch Centrum Groningen (UMCG) het nut van innovatieve CT-technieken hiervoor. Op dit moment wordt gekeken naar het nut van de combinatie van twee CT-beelden, opgenomen met verschillende röntgenenergieën. Dit gebeurt met behulp van dual-energie-CT (DECT)-scanners die recent beschikbaar zijn gekomen. De manier waarop fotonen met materie wisselwerken hangt, afhankelijk van hun energie, op een andere manier af van de dichtheid en samenstelling van de materie. Daarom verschaffen DECT beelden meer informatie over dichtheid en samenstelling

dan standaard CT-beelden.

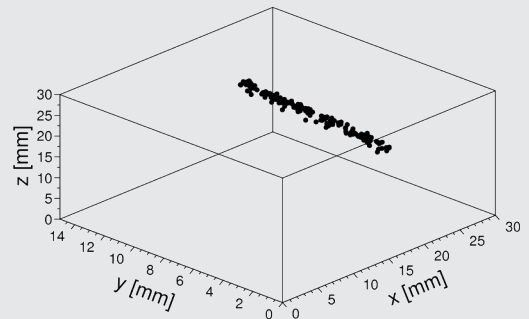
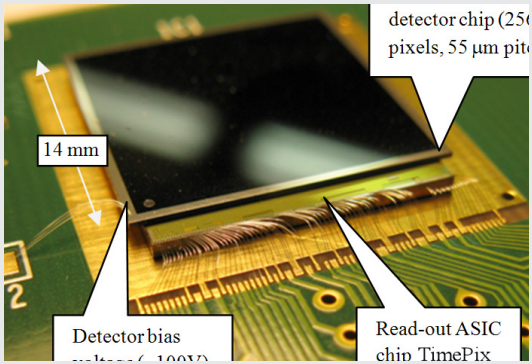
Het onderzoek op KVI-CART gebruikt een set van weefselequivalente materialen waarvan de samenstelling bekend is. Hiervan worden DECT-beelden gemaakt met een scanner die hiervoor door Siemens beschikbaar wordt gesteld (Figuur 4, links). Het energieverlies van protonen in deze materialen wordt in experimenten met de protonenbundels van de AGOR-deeltjesversneller op KVI-CART nauwkeurig bepaald (Figuur 4, rechts). We kunnen de dracht van protonen met een nauwkeurigheid van beter dan 0.1% bepalen.

In de nabije toekomst zullen we ook gebruik maken van de gloednieuwe spectrale CT-technologie, waarbij de door de CT-detector gedetecteerde röntgenfotonen in meer of mindere mate naar energie kunnen worden gescheiden. Dit is in potentie een nog krachtiger manier om meer informatie over dichtheid en samenstelling van iedere individuele patiënt te verkrijgen.

Het gebruik van DECT en spectrale CT levert extra informatie, maar omzeilt niet het fundamentele punt dat fotonen en protonen op een verschillende manier met materie wisselwerken. Een principieel betere manier om de energieafgifte van protonen in een patiënt te bepalen is dan ook het gebruik van protonen om deze informatie te achterhalen. Door een protonenbundel door een patiënt heen te schieten en zowel de afbuiging door verstrooiing als het energieverlies te meten, kan een 3 dimensionaal beeld van de energieafgifte verkregen worden. In de praktijk is het echter niet mogelijk om voor elke patiënt dergelijke zogenaamde protonradiografie uit te voeren, hoofdzakelijk omdat de maximale protonenenergie (230 tot 250 MeV) niet voor alle patiënten voldoende is. Wij onderzoeken daarom hoe protonradiografie gebruikt kan worden om informatie verkregen via moderne CT-technieken nauwkeuriger te interpreteren, een soort ka-



**FIGUUR 4** CT scanner tijdens een meting bij Siemens met weefselequivalente materialen (links). Opstelling bij KVI-CART voor het meten van de energieafgifte van protonen in verschillende weefsels (rechts).



**FIGUUR 5** Links: De TimePix chip gebruikt voor protonradiografie. Rechts: Het traject van een individueel proton gemeten met behulp van een Time Projection Chamber tijdens een experiment bij de AGOR deeltjesversneller op KVI-CART. Het gevoelige detectorvolume meet ongeveer  $1,5 \times 1,5 \times 1,5 \text{ cm}^3$ .

libratie dus.

Als onderdeel van dit onderzoek ontwikkelen we in samenwerking met NIKHEF in Amsterdam detector-technologie voor protonradiografie die gebaseerd is op recente ontwikkelingen in de hoge-energiefysica. Met Time Projection Chambers gebaseerd op TimePix silicium sensoren met een pixelgrootte van  $55 \times 55 \mu\text{m}^2$  kan het pad van een proton met een nauwkeurigheid van een paar tientallen micrometer bepaald worden (Figuur 5).

### Een nauwkeurigere primaire standaard voor dosis door protonen

Een paar jaar geleden hebben we een project opgezet met als doel de absolute primaire dosimetriestandaard voor protonen tot beter dan 1% nauwkeurig te bepalen. Hierbij werken we samen met de nationale metrologie-instituten van Nederland (VSL) en Zwitserland (METAS). Primaire dosimetrie is gebaseerd op calorimetrie in water: de temperatuurstijging van water door de energieafgifte van straling. De typische dosis gedeponneerd in de tumor tijdens een patiëntenbestraling is 2 Gy (gray,  $1 \text{ Gy} = 1 \text{ J/kg}$ ). Een energieafgifte van 1 Gy correspondeert met een stijging van de temperatuur van water met 0.25 mK. Een nauwkeurigheid van 1% vereist dus het meten van een temperatuurstijging van een paar microkelvin! Naast uiterst precieze thermometers vereist dit ook goede controle en begrip van systematische effecten zoals energie die verloren gaat in chemische reacties en warmtetransport in het water. Experimenten met protonenbundels van de AGOR deeltjesversneller gebruiken dan ook

een extreem goed geïsoleerde en temperatuurgestabiliseerde calorimeter gevuld met uiterst zuiver water (Figuur 6).

### Verificatie van de toegediende dosis

Bij het toedienen van de stralingsdosis aan de patiënt kunnen afwijkingen ten opzichte van het behandelplan optreden door bijvoorbeeld anatomische veranderingen sinds het maken van het behandelplan, onzekerheid in de dracht van protonen in de patiënt (zie hierboven), onzekerheden/fouten in de positionering van de patiënt ten opzichte van de protonenbundel en fouten in de uitvoering van het behandelplan. Doordat protonen, in vergelijking met fotonen, hun dosis lokaler afgeven (de braggpiek) leiden dergelijke afwijkingen in het geval van protonentherapie mogelijk sneller tot ontoelaatbare afwijkingen in de daadwerkelijk toegediende dosis. Dit betekent dat voordat we de voordelen van protonen ten volle kunnen benutten, een methode voor in-vivo-verificatie van de toegediende dosis nodig is zodat, indien nodig, het behandelplan kan worden aangepast. De op dit moment enige praktisch toepasbare methode hiervoor is positronemissietomografie (PET) van de radioactieve isotopen die door de protonen in de patiënt door middel van kernreacties ontstaan. De verdeling van deze isotopen in de patiënt na bestraling geeft aan waar protonen langsgekomen zijn en houdt dus verband met de afgegeven stralingsdosis.

KVI-CART doet samen met het UMCG onderzoek naar het klinisch nut van in-vivo verificatie van de toegediende dosis met behulp van PET. We maken

gebruik van nauwkeurige en realistische montecarlo-simulaties gebaseerd op patiëntendata. Enkele resultaten worden in figuur 7 getoond. We hebben recent aangetoond dat een flexibele PET scanner bestaande uit twee kleine panelen even goede beelden maakt als een vele malen duurdere en minder flexibele commerciële scanner. In parallel wordt gewerkt aan de ontwikkeling van state-of-the-art PET apparatuur gebruikmakend van de nieuwste technologie.

### Protonentherapie in Groningen

Het proces dat zal leiden tot de invoering van protonentherapie in Nederland is bijna afgerond. Eind 2013, begin 2014 kregen vier centra, waaronder het UMC Groningen Protonen Therapie Centrum (GPTC) [4], een vergunning van de minister. Realisatie van vier centra zal leiden tot een totale landelijke capaciteit van 2200 patiënten per jaar. Zodra contracten met de zorgverzekeraars zijn afgesloten kan met de bouw begonnen worden. Het GPTC,

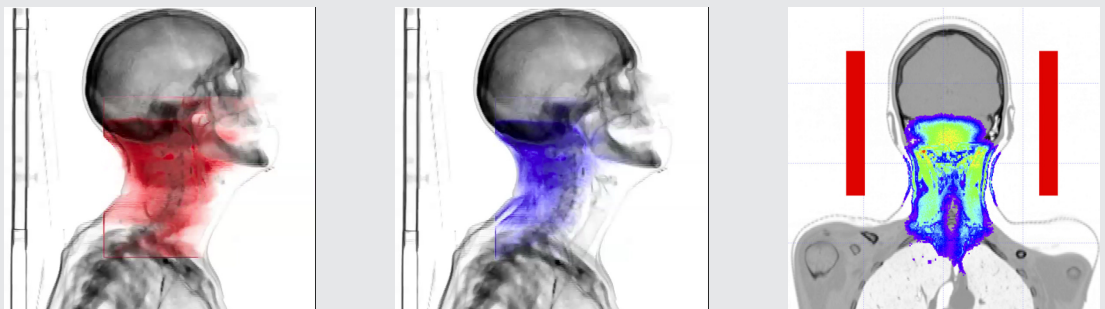
### Referenties

- [1] Nederlandse Kankerregistratie, beheerd door het Integraal Kankercentrum Nederland (IKNL), [www.iknl.nl](http://www.iknl.nl), september 2014
- [2] Taheri-Kadkhoda et al, Radiation Oncology 2008 3:4
- [3] [www.rug.nl/kvi-cart/research/mp/](http://www.rug.nl/kvi-cart/research/mp/)
- [4] [www.umcgroningenptc.nl](http://www.umcgroningenptc.nl)



**FIGUUR 6** De watercalorimeter (geopend) die gebruikt wordt op KVI-CART voor het ontwikkelen van een betere primaire standaard van dosisafgifte door protonen. Bij gebruik wordt de calorimeter afgesloten voor goede isolatie en temperatuurstabilisatie.

waarin KVI-CART participeert, plant 600 patiënten per jaar te behandelen. Een aantal jaren geleden werd in Groningen het Particle Therapy Research Center (PARTREC) opgezet als overkoepelende organisatie voor alle onderzoek en opleiding rond protonentherapie. Alle relevante onderzoeksdomeinen (technologie, afbeeldingstechnieken, biologie, geneeskunde en bedrijfskunde) worden hierbij betrokken. Verwacht wordt dan ook dat het in dit artikel beschreven onderzoek in de medische fysica aan KVI-Center for Advanced Radiation Technology in de toekomst uitgebreid gaat worden •



**FIGUUR 7** Links: gesimuleerde dosisverdeling (rood) door bestraling met protonen. Midden: verdeling van het zuurstof-15 (blauw), het voor deze toepassing belangrijkste door de protonenbestraling geproduceerde isotoop. Beide verdelingen zijn gesuperponeerd op het CT-beeld waarop het behandelplan is gebaseerd. Rechts: PET-scanner bestaande uit twee kleine panelen (rood) optimaal gepositioneerd voor deze specifieke bestraling en patiënt.

# Van de Voorzitter

DOOR SYMEN THEO JOUSMA

Wanneer je dit leest is het nieuwe collegejaar al een paar maanden van start. Een nieuw jaar met nieuwe kansen en uitdagingen. Een jaar waarin het FMF-bestuur weer volledig bestaat uit heren. Traditioneel getrouw mag ik, als nieuwe voorzitter van onze vereniging, als eerste mijzelf introduceren in de Perio\*diek.

**M**ijn naam is Symen Theo Jousma (maar iedereen noemt mij Symen) en ik ben 4e jaars student Technische Natuurkunde student. Inmiddels heb ik met trots mijn handtekening mogen zetten op mijn Bachelors diploma en ben ik begonnen aan mijn master Applied Physics. Ik woon in Groningen maar kom oorspronkelijk uit Drachten. Ik heb twee zusjes, van wie er ook één in Groningen studeert. Mijn passie ligt bij tennis en ik ben actief bij Tennisclub Albertus Magnus.



Symen Theo Jousma, voorzitter der FMF.

Toen ik begon met studeren had ik al snel mijn draai gevonden en een gezellige vriendengroep om mij heen gevormd. Van de FMF introductie, is er bij mij vrij weinig blijven hangen. Het duurde dan ook ruim een jaar voordat ik met enige regelmaat in de ledenkamer te vinden was. Ik leerde hier snel veel nieuwe mensen kennen en was daarna ook vaker aanwezig bij de activiteiten. Dit alles resulteerde erin dat ik plaats nam in de Pientercommissie. Samen met een geweldig gezellige groep mocht ik als voorzitter een fantastisch Pienterkamp organiseren.

Naast de Pientercommissie was ik ook actief in de Huygenscommissie. Dit bleek prima te combineren

met het studeren. Uiteindelijk besloot ik een jaar minder te gaan studeren en mij in te zetten voor de vereniging. Een beslissing waar ik tot op heden geen spijt van heb.

Ik heb tot nu toe een heel leuke tijd als voorzitter van dit bestuur. Overdag is het mijn verantwoordelijkheid dat alles binnen het bestuur in goede banen loopt. 's Avonds worden de borrels en feestjes bezocht. De vele nieuwe contacten die gelegd worden, geven mij veel voldoening. Samen met mijn mede bestuursleden willen wij een memorabel

jaar neerzetten. Niet alleen voor onszelf, maar ook voor jullie, de leden. Een jaar met vele hoogtepunten en waarin de FMF alweer haar 55ste (!) verjaardag mag vieren.

Ik hoop jullie dan ook allemaal terug te zien op één van de vele activiteiten en daar samen een biertje te drinken. Heb je vragen over mij persoonlijk, de vereniging of het bestuur? Schroom dan niet en spreek mij aan als je me tegen komt. Dan rest mij nog te zeggen dat ik uit kijk naar wat dit jaar verder nog te bieden heeft. Hopelijk kunnen we er met zijn allen een fantastisch jaar van maken •

# Big Bang

## *Latest news from the Big Bang theory*

BY REMKO KLEIN AND DIEDERIK ROEST

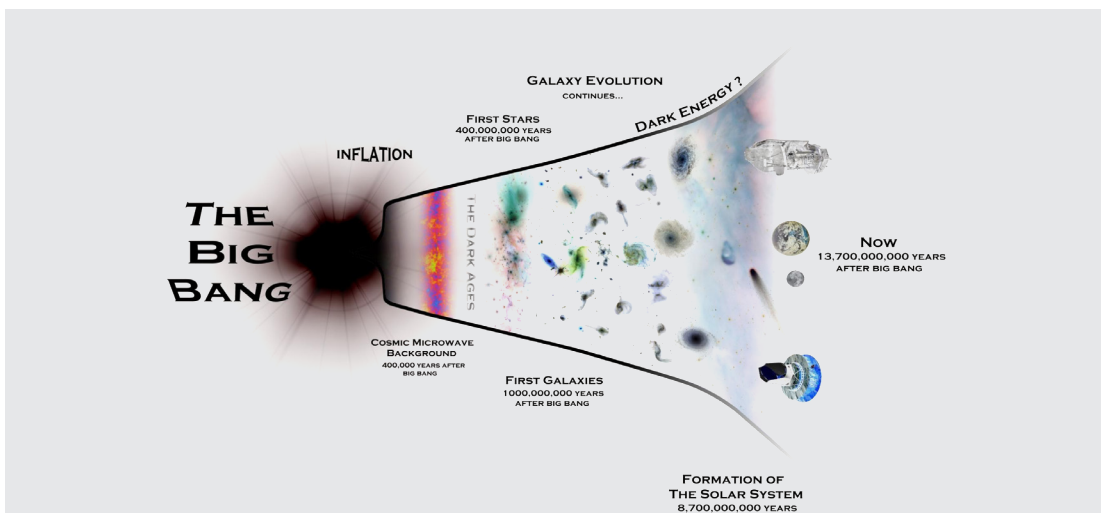
Edwin Hubble was amongst the first to observe, via the Doppler shifts of emitted radiation, that galaxies are moving away from us. The only reasonable way to explain this is by accepting that the entire Universe is expanding: as time goes by, the universe becomes ever larger. Reversing this logic, one concludes that by going back in time, the Universe becomes smaller and smaller.

According to the standard equations of General Relativity, this reversed logic leads to a singularity at the earliest instance, that is referred to as the Big Bang. At this moment, the size of the Universe would have been infinitely small, while its energy density would have been infinitely large.

Soon after this realization the Big Bang theory was constructed, which encompasses both this initial moment and the subsequent, steady, expansion and evolution of the Universe. While this paradigm of cosmology has very strong observational support - from, for instance, nucleosynthesis, i.e., the formation of protons and neutrons during the first three minutes -, and explains a large number of features, it falls short

in providing an explanation for others. The common denominator of the latter is the surprising smoothness of the Universe on large scales.

- First of all, the galaxy distribution over distances larger than 100 Mpc (1 Mpc  $\approx$  3.3 million light years) is too homogeneous for the Big Bang theory.
- Secondly, one would expect the cosmic microwave background (more details later) to be isotropic over angles of at most 1 degree on the sky, in contrast to the fact that its temperature is observed to be very nearly the same (approximately 2.7 K) on the entire sky.



**FIGURE 1** An artist's impression of the evolution of the Universe, running from left to right.



- Finally, Grand Unified Theories of high-energy physics (theories that aim to unify the known forces other than gravity, i.e., the two nuclear forces and the electromagnetic force) predict the existence of ultra-heavy magnetic monopoles (objects that have either an isolated South or North pole), which would create unobserved density accumulations.

To tackle these problems of the Big Bang theory, Guth and Linde proposed in the early 1980s that the Universe did not just start to steadily expand after the Big Bang.

Instead of steady growth, a period of rapid accelerated expansion was postulated, a mere fraction of a second following the Big Bang, after which the steady expansion of the Big Bang theory would resume. This initial period of exponential growth is referred to as inflation (see figure 1).

### Quantum fluctuations

At first, the status of inflation was hypothetical at best, as it only provided an explanation for already observed, large-scale features of the Universe. This changed dramatically with the realisation that inflation has a much further-reaching implication: in addition to smoothing out the Universe at large scales, it also provided the initial seeds for all the inhomogeneities, such as galaxy clusters, that make the Universe such an interesting place today. During the phase of furious growth, short-scale quantum fluctuations were stretched out to macroscopic sizes. These inflated fluctuations would then result into perturbations in the energy density, and effectively became classical initial conditions for the evolution of the Universe. During the ensuing 13.8 billion years, these diluted quantum effects were magnified under the influence of gravity: dense areas attract the matter from less dense parts, amplifying the differences in density between different areas. Over time, these initial fluctuations evolved

*“Instead of steady growth, a period of rapid accelerated expansion was postulated.”*

into the entire large-scale structure of the Universe as observed today!

The fluctuations predicted by inflation come in two flavours: scalar fluctuations, which give rise to the density fluctuations, and tensor fluctuations, corresponding to gravitational waves. These perturbations are predicted to have very specific properties, and are characterized via the so-called scalar power spectrum  $P_s(k)$  and tensor power spectrum  $P_t(k)$ . These power

spectra quantify the amplitude of fluctuations with different length scales, as captured by the wavenumber  $k = 2\pi/\lambda$ . They thus give us a measure of scale dependence

of the fluctuations, and generically inflation predicts that the fluctuations are nearly independent of scale. For instance, for the scalar perturbations one finds:  $P_s(k) \propto k^{n_s-1}$ . Most models of inflation predict that the so-called spectral index,  $n_s$ , is close to 1, resulting in a nearly scale independent scalar power spectrum. The precise details may vary amongst different models. The case of the tensor perturbations is similar.

### Cosmic Microwave Background

This mind-boggling interplay between quantum fluctuations, inflation and structure formation can be tested by comparing predictions with observations. In principle, this can be done at any stage of the Universe’s evolution; however, it is very difficult to extract accurate information on the state of the Universe for most periods. There is one moment for which we do have a treasure trove of information: recombination, taking place around 380.000 years after the Big Bang, when neutral hydrogen was first formed.

At earlier times, light could not travel freely due to constant scattering interactions with the high number of charged plasma particles present in the Universe. After the formation of neutral hydrogen, such scattering processes no longer dominated and light could move freely. Thus, at this moment the Universe be-

came transparent. The light that was emitted at this moment is called the Cosmic Microwave Background (CMB) and can be observed from every direction in the sky. In fact, the CMB photons are so abundant that they are responsible for 1 percent of the background noise on analogue televisions.

As the Universe became transparent, information on the state of the Universe (at that time) was stored in the CMB. By observing this remnant radiation, we can retrieve an accurate picture of the Universe during its early stages, when all inhomogeneities had only evolved for a few hundreds of thousands of years.

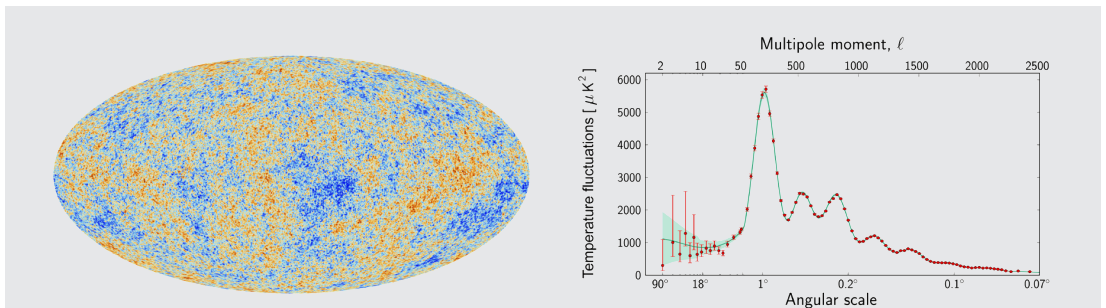
The CMB has two important physical traits: frequency dependence and polarisation patterns. The former of these translates, via Planck's law of the blackbody spectrum, into temperature variations. These variations are a direct consequence of the quantum fluctuations predicted by inflation. They have been looked for from the 1980s onwards, and indeed the COBE satellite discovered them in 1992. This is indicated by the so-called T-T power spectrum of the CMB (figure 2). The T-T power spectrum gives a measure of the correlation of temperature perturbations along different directions on the sky, and it can be directly related to the scalar power spectrum. Thus, comparing the observed properties of the temperature variations with those predicted theoretically provides a great test of inflation. Subsequent studies by the WMAP and Planck

satellites have confirmed that the statistical properties of these variations are in full agreement with the predictions of inflation!

An equally generic prediction of inflation concerns the second property, related to the polarisation of the CMB photons. Inflation predicts particular patterns in the polarisation; moreover, it predicts very specific correlations between the temperature and the polarisation modes. The latter consists of two polarisation components: E- and B-modes. During recombination, when the CMB was formed, the tensor perturbations left a specific B-mode polarization pattern, with a corresponding B-B power spectrum. Similar to the T-T power spectrum, the B-B power spectrum simply gives a measure of correlation between B-mode polarisations at different points on the sky. As far as we know, tensor perturbations are the only primordial source for such a pattern, and detection thereof therefore corresponds to the discovery of primordial gravitational waves!

## Observational status

As already noted, the general predictions of inflation as captured in the temperature fluctuations are confirmed by actual observations. This is of course already a major milestone. However, more strikingly, given the highly accurate measurements on the temperature fluctuations, it has in addition proven possible to put



**FIGURE 2** Left panel: the temperature anisotropies  $\delta T$  of the CMB. Right panel: the power spectrum of  $\delta T$  - red points indicate Planck data while the green line is the inflationary prediction for  $n_s = 0.9603$ .

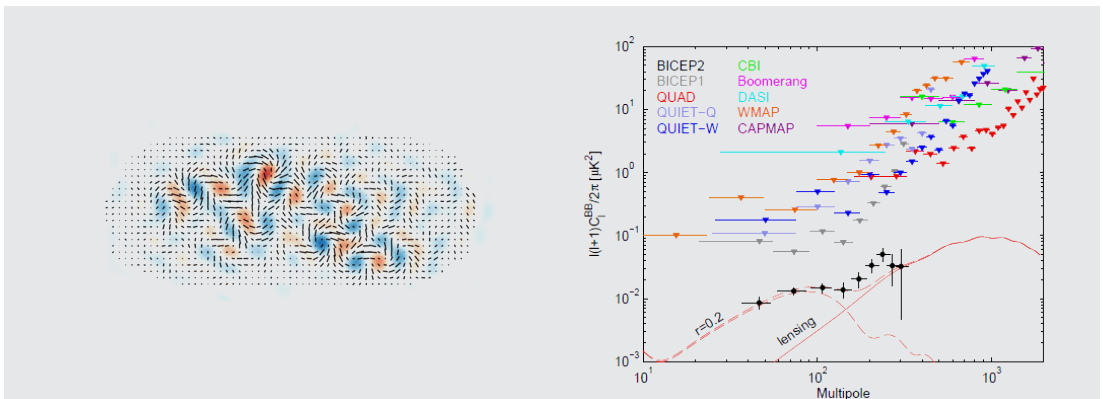
strong constraints on the inflationary parameters. That is, we can perform precise measurements that allow us to discern between different models of inflation. In particular, the green line in the right panel of figure 2 is the prediction of the concordance model ( $\Lambda$ -CDM) of cosmology supplemented with a single inflationary parameter: the scale dependence of the initial scalar fluctuations, as encoded in the spectral index  $n_s$ . The impressive agreement over three decades of wavenumbers requires this scale dependence to be equal to  $n_s = 0.9603 \pm 0.0073$ , ruling out the scale-invariant case  $n_s = 1$  at a certainty of 99.99994 percent. Another parameter one can measure is the so-called tensor-to-scalar ratio,  $r$ , defined as:  $r = P_t(k)/P_s(k)$ . This parameter thus gives a measure of the amount of gravitational waves relative to the amount of scalar perturbations, and hence any non-zero value would imply quantum gravitational waves. The value of  $r$  can in principle be extracted from the B-B power spectrum; however, this proves much more finicky from an observational point of view. Amazingly, the team of the BICEP2 telescope has claimed to be able to measure it and found  $r = 0.20^{+0.07}_{-0.05}$  without foreground subtraction (figure 3). However, it is currently heavily debated whether the BICEP2 signal is indeed of primordial origin, or whether it could also (partially) stem from more mundane sources such as dust in our own galaxy. Hopefully, this matter will be resolved in

In our research group on Quantum Gravity at the newly found Van Swinderen Institute for Particle Physics and Gravity, we are trying to provide a sound theoretical basis for theories of inflation and their resulting predictions. If you want to know more, or if you are interested in doing your BSc or MSc research in this direction, pass by in the theoretical physics corridor - building 11 of Nijenborgh 4!

the coming months, and then we finally might know more about the rôle of gravity's quantum fluctuations after the Big Bang...

### Concluding remarks

Observations of the CMB contain a great promise towards discovering more about the physics of inflation, which has taken place at very high energy, around or just below the grand unified scale. As such, it is unprecedented as an observational window in this energy range, and can be used complementary to traditional particle physics approaches. In this article, we have reported on the latest observational progress in this direction •



**FIGURE 3** Left panel: the B-mode polarization of the CMB. Right panel: the power spectrum of B-black points indicate BICEP2 data, while the red line is the inflationary prediction for  $r = 0.2$ .

# Het cochlea model

## *Numerieke wiskunde voor slechthorenden*

DOOR OSCAR HESLINGA

Wellicht heb je het programma ‘DOOF!’ op de Nederlandse televisie al voorbij zien komen. Verschillende mensen met een gehoorafwijking, die via een medische ingreep in staat zijn opnieuw, of voor het eerst, te kunnen horen worden in dit programma gevolgd. De reacties van baby’s die voor het eerst horen en van de mensen die na jaren dat éne bekende geluid weer horen. Het gaat hier om het plaatsen van een cochleair implantaat (CI). Dit apparaat ligt aan de rand van de technologische mogelijkheden en hier wordt nog altijd onderzoek naar gedaan. Hoe werkt het menselijke oor eigenlijk? Kunnen wij zoiets complex als het gehoor nabootsen met een implantaat? Wat voor rol spelen wij, bèta’s, bij de ontwikkeling van dit technologisch vernuft?

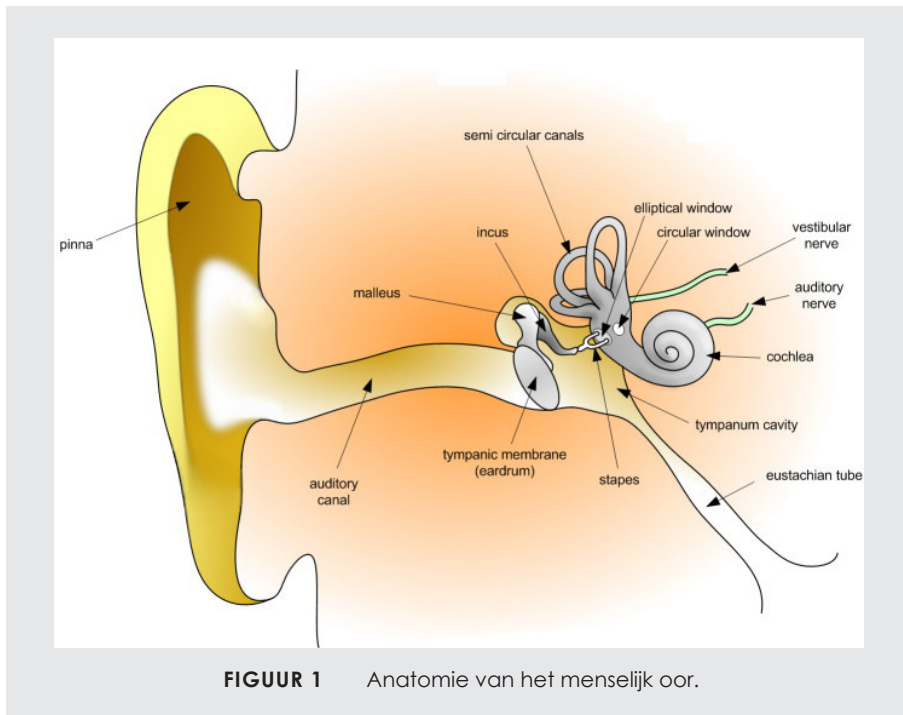
**B**elangrijk is om eerst wat terminologie op te bouwen, dit doen we aan de hand van figuur 1. Een eenvoudige manier om het oor te leren kennen is door een geluidsgolf te volgen die zijn weg aflegt naar onze hersenen. Geluidsgolven zijn trillingen in de lucht, deze trillingen gaan bij de gehoorgang (auditory canal) naar binnen. De trillingen in de lucht worden door het trommelvlies (ear drum) omgezet in een mechanische beweging. De mechanische energie wordt getransporteerd door het middenoor, een serie botjes genaamd hamer, aambeeld en stijgbeugel (malleus, incus, stapes), naar het binnenoor, de cochlea. De cochlea is een buis in de vorm van een slakkenhuis (de andere kanalen in de figuur zijn voor ons niet van belang). De mechanische energie komt bij het ovale venster (OW, oval/elliptical window) binnen en wordt hier omgezet tot trillingen in de cochleaire vloeistof. In figuur 2 zien we een doorsnede van de buis (er wordt aangenomen dat de buis recht is, dit heeft weinig effect op het modelleren van de geluidsgolven [1]). De cochlea bestaat ruwweg uit twee vloeistofkamers die over de gehele lengte worden gescheiden door een membraan, de cochleaire partitie (CP). Er is alleen een kleine doorgang voor de vloeistof aan het einde, de apex van de cochlea. De cochleaire partitie is essentieel voor de werking van ons gehoor. Het membraan is be-

dekt met haarcellen. Zodra de vloeistof in de cochlea in beweging komt door een inkomend signaal zullen de haarcellen gaan meebewegen. De beweging van deze haarcellen genereert een potentiaal dat leidt tot een elektrisch signaal. Via de onderliggende zenuwcellen (auditory nerves) wordt dit signaal naar de hersenen getransporteerd waar registratie plaatsvindt.

We hebben nu van voor tot achter de rol besproken van alle elementen in het oor. Het doel is uiteindelijk om daadwerkelijk het gehoor na te kunnen bootsen. We willen de dynamica binnenin het oor dus modelleren, het ontstane model wordt het cochlea model genoemd. Hiervoor gaan we terug naar de haarcellen. Deze bewegen als oscillatoren mee op de verandering van de druk in de vloeistof vanwege het inkomende signaal. Van de cursus Mechanica weten we ongetwijfeld nog de differentiaalvergelijking voor een aangedreven harmonische oscillator:

$$p = m \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + d \cdot \frac{\partial y}{\partial t} + sy. \quad (1)$$

Misschien dat deze vergelijking niet helemaal is wat je verwachtte. Dit is de versie waarin de vloeistofdruk  $p$  als drijvende kracht wordt gebruikt voor een uitwijking  $y$ . Belangrijk zijn de parameters  $m$ ,  $d$  en  $s$ ,



respectievelijk de akoestische massa ( $\text{kg}/\text{m}^4$ ), demping ( $\text{kg}/[\text{s}\text{m}^4]$ ) en stijfheid ( $\text{kg}/[\text{s}^2\text{m}^4]$ ). Waarschijnlijk ook nog bekend is de resonantiefrequentie:

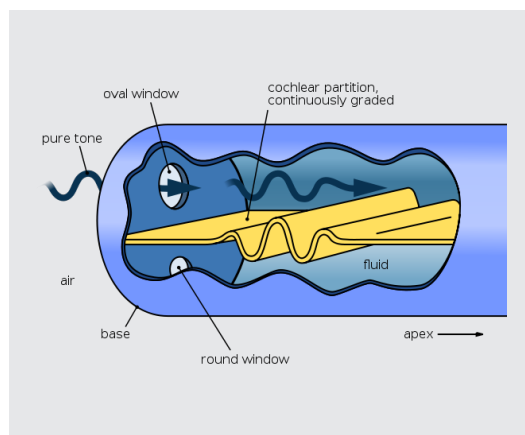
$$\omega = \sqrt{\frac{s}{m}}. \quad (2)$$

De CP is een rij van haarcellen die zich individueel gedragen als harmonische oscillatoren allemaal met hun eigen massa, demping en stijfheid en dus hun eigen resonantiefrequentie. Over de gehele CP zijn de oscillatoren dusdanig gerangschikt dat er een relatie  $\omega(x)$  bestaat tussen de plaats  $x$  op de CP en de resonantiefrequentie  $\omega$ . Het zal je niet verbazen dat het bereik van de  $\omega$  over de CP het voor een mens waarneembaar deel van het spectrum is, liggend op ongeveer  $[20, 20000]$  Hz. De resonantie wordt gevisualiseerd in figuur 2. Bij een inkomend signaal met één frequentie zal de uitwijking op de bijbehorende plaats maximaal zijn, daaromheen neemt deze uitwijking snel af.

Het ontstane drukverschil werkt niet alleen in vertica-

le richting op de haarcellen, maar ook op de vloeistofstroom in horizontale richting. Vanuit de stromingsleer neemt men hiervoor de Eulervergelijking:

$$-\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (3)$$



**FIGUUR 2** De cochlea gevisualiseerd als een buis met twee vloeistofkamers gescheiden door de CP.

met  $\rho$  de vloeistofdichtheid en  $u$  de vloeistofsnelheid. Vergelijkingen 1 en 3 kunnen worden gecombineerd tot de volgende partiële differentiaalvergelijking (PDV):

$$\frac{\partial}{\partial x^2} (m \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + d \cdot \frac{\partial y}{\partial t} + sy) - \frac{2\rho}{h} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0, \quad (4)$$

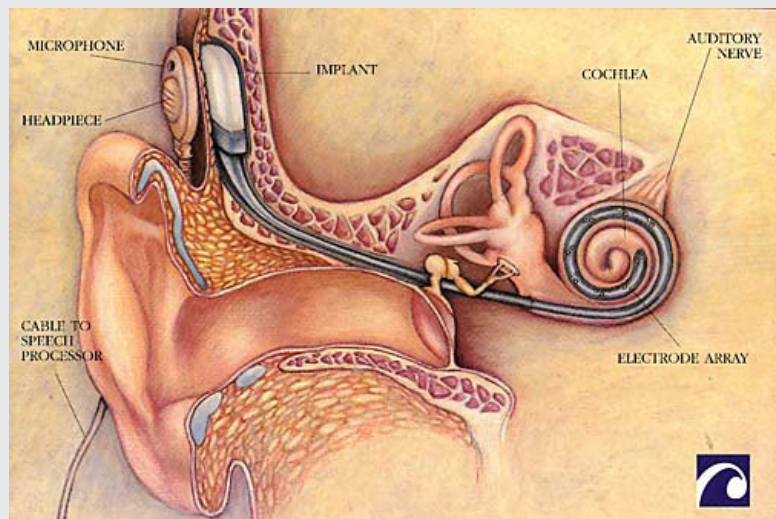
met  $h$  de hoogte van de buis. Het is niet helemaal duidelijk hoe (4) is ontstaan. Dit vereist nog wat meer tussenstappen maar het gaat om het idee met wat voor PDV we te maken hebben. Een complete afleiding wordt gegeven in [2]. Bedenk dat  $m$ ,  $d$  en  $s$  functies van  $x$  zijn, waardoor het erg ingewikkeld wordt om een analytische oplossing voor (4) te vinden. Er rest ons dus het gebruik van numerieke methoden om de oplossingen te vinden. Dit vereist de definitie van roosterpunten waar de oplossing op benaderd zal worden. Het is niet erg dat de oplossing op een eindig aantal punten wordt benaderd. We hebben per slot van rekening met een eindig aantal haarcellen op de CP te maken. De keuze van de juiste numerieke methode is echter verre van eenvoudig. Naast de gebruikelijke overwegingen met betrekking tot convergentiesnelheid en stabiliteit kunnen er andere problemen ontstaan bij het modelleren van het middenoor. Bovendien zal de betreffende code geïntegreerd moeten worden in de elektronica van het CI. Je kan je voorstellen dat een dusdanig apparaat, dat de afmetingen van een natuurlijke cochlea moet hebben, beperkte ruimte heeft voor de elektronica. Er is dus een fysieke beperking op het aantal punten waar we de oplossing kunnen vinden. Zie ter illustratie figuur 3.

Laten we er van uit gaan dat we een fatsoenlijk cochlea model met een gedegen numerieke methode

hebben. Dit bestaat ook daadwerkelijk, maar zoals bij het gros van de technologie is er nog veel ruimte voor ontwikkeling. Wat meer tot de verbeelding spreekt is de verdere toepassing van het cochlea model. Het CI is hiervan de meest actuele maar niet het enige doeleinde. Eén van de meest interessante eigenschappen van de cochlea is het responsieve gedrag. Oftewel, de cochlea vangt niet alleen geluid op, deze zendt ook geluid terug. Deze emissies worden otoakoustische emissies (OAE's) genoemd en ontstaan als reactie op binnenkomend geluid, maar er zijn zelfs spontane OAE's mogelijk. Het volume van OAE's ligt zo laag dat we ze zelf niet waarnemen, maar een gevoelige microfoon pikt deze wel op. Waar komen deze OAE's vandaan? De verklaring zit hem in het niet-lineaire gedrag van de cochlea. Om dit uit te leggen kruipen we kort in een stukje signaalanalyse. Een systeem, zoals de cochlea, ontvangt een inputsignaal gegeven door  $X(t)$  en geeft als outputsignaal  $Y(t)$ . Voor een lineair systeem geldt dan:

$$Y(t) = H(t) * X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\tau)X(t - \tau)d\tau, \quad (5)$$

hierbij is  $H(t)$  de transferfunctie die aangeeft hoe de



**FIGUUR 3** Het menselijk oor waarin een CI is geplaatst.

input naar de output wordt omgezet via het convolutieproduct. Een interessante eigenschap van het convolutieproduct ziet men na het toepassen van de Fourier transformatie aan beide kanten van (5):

$$Y(\omega) = H(\omega) \cdot X(\omega), \quad (6)$$

waarbij  $\omega$  de frequentie is. In het frequentiedomein is het convolutieproduct dus gewoon een normale vermenigvuldiging. Dit is de reden waarom signaalanalyse van lineaire systemen in het frequentiedomein gebeurt. Nu terug naar de cochlea en de OAE's. Experimenten met cochlea waar een inputsignaal met twee frequenties  $f_1$  en  $f_2$  werden gebruikt gaven een outputsignaal met deze frequentie plus een signaal met frequentie  $f_2 - f_1$ . [1] De vermenigvuldiging in (6) kan nooit nieuwe frequenties in de output creëren (simpelweg omdat 0 keer iets altijd 0 is), oftewel er zit niet-linear gedrag in het systeem. Hoe kan het dat deze nieuwe frequenties ontstaan? Het zit hem erin dat in (4) massa, demping en stijfheid van de CP afhankelijk zijn van  $y$  en indirect dus ook van de tijd omdat  $y(t)$ . Je kunt het zien als een feedbacksysteem; afhankelijk van de output op tijdstip  $t$  wordt het systeem aangepast voor het berekenen van tijdstip  $t + \Delta t$ .

Dit is ook de reden waarom (4) in de tijd moet worden opgelost en niet in het frequentiedomein. Voor het oplossen van (4) kwamen we er al snel achter dat dit het beste numeriek gedaan kan worden. De niet-lineariteit van het systeem maakt het niet veel moeilijker, in de code moeten  $m$ ,  $d$  en  $s$  alleen elke tijdstap worden geüpdatet.

Wat is nu de toepassing van deze OAE's? Door signalen een cochlea in te sturen en de OAE's op te vangen verkrijgen we inzicht in wat er in het gehoorproces gebeurt. Er kunnen op deze manier heel accuraat defecten worden gevonden door de resultaten te vergelijken met beschikbare data van gezonde cochleae. Het resultaat is dat we een objectieve manier hebben gevonden om de functionaliteit van de cochlea te testen. Normaal gebeurt dit namelijk door een patiënt geluiden te laten horen en te vragen: "Hooft u dit?". Dit is natuurlijk een erg subjectieve manier en bovendien

is dit bij baby's niet mogelijk, je kunt ze immers niets vragen. Gehoorafwijkingen of schade kunnen dus ook op veel jongere leeftijd in kaart worden gebracht.

Een laatste toepassing die ik zal noemen is de ontwikkeling van sensoren. Stel je voor, een sensor die rapporteert aan een geïntegreerd cochlea model. Na de run van de meting door het model is het geluid zo geïntegreerd dat er beslissingen op basis van de data kunnen worden genomen. Dit klinkt nogal plastisch, dus ik geef een voorbeeld: Als we een weg over willen steken, kunnen we vaak puur op gehoor al beslissen of het te gevaarlijk is. We horen bijvoorbeeld een geluid dat past bij een auto en het volume is dusdanig hoog dat we ons realiseren dat de auto te dichtbij is. Kennelijk kunnen we de geluiden onderscheiden en hebben we geleerd wat wel en wat niet relevant is. Een ander voorbeeld is het plaatsen van sensoren bij bedden in ziekenhuizen. Aan de hand van het opgevangen geluid kan er automatisch worden bepaald of een patiënt in nood is of gewoon wat natuurlijke geluiden maakt. Dit verlaagt bij ziekenhuizen de inzet van verpleegkundigen om rondes te lopen. Het researchinstituut INCAS<sup>3</sup> in Assen werkt aan tal van dit soort toepassingen en hier heb ik dan ook, in het kader van een stage, aan de numerieke methoden voor het cochlea model kunnen werken.

Om dan toch af te sluiten met het CI. Het is erg inspirerend om als wiskundige op de audiologie-afdeling van het UMCG rond te lopen. Dove mensen weer kunnen laten horen door het nabootsen van het menselijk gehoor is één van de technische hoogstandjes van de natuur •

## Referenties

- [1] P.W.J. van Hengel, Emissions from cochlear modeling, PhD thesis, 1996
- [2] O.L. Heslinga, Cochlear mechanics: Extension of the circuit model to the middle ear, 2013

# Vegetarische wraps

*met spinazie en feta*

DOOR WALEWEIN NOORDAM

**M**ijn reden tot het koken van dit recept is eigenlijk omdat ik graag vlees eet. Wel grappig eigenlijk, maar als er een vegetarische vriend of vriendin over de vloer komt en je dan eten gaat maken is het altijd weer de vraag, hmmm wat zullen we gaan eten. Nou ken ik dit recept van mijn moeder, die vaak vegetarisch probeert te koken, maar van de meeste vegetarische meuk ben ik geen fan. Toen ik dit at echter, smaakte mij het wel. Dus ben ik zelf uiteindelijk aan de slag gegaan en heb na wat aankloten de goede proporties gevonden. Dus bij deze mijn vegetarische wraps met spinazie en feta.

## Ingredienten

- 1 pak kruidenknoflook wraps (8 pannenkoekunits)
- 450 gr. spinazie á la crème
- 175 gr. geraspte kaas
- 100 gr. feta
- 1 teentje knoflook
- 150 gr. champignons
- 2 el olie
- Zwarte peper



Moeilijkheid:



Personen:

2

Bereidingstijd:

+/- 15 min bereiding  
20 min. in de oven

## Benodigheden

- wokpan (of koekenpan)
- ovenschaal
- oven
- satéprikkers

## Bereiding

Verwarm de oven voor op 220 °C. Verhit de olie in een koekenpan of wokpan en fruit hierin de knoflook. Wanneer de knoflook gaar is, kan je de spinazie erbij doen. Na ongeveer 5 á 10 minuten is de (bevroren) spinazie gaar. Als laatste kunnen nu de champignons erbij.







**FIGUUR 1** Zie hier het eindresultaat, zoals de wraps "horen" te worden.

Wanneer deze gaar zijn, ben je klaar met de saus en kan je wraps gaan bouwen. Doe wat saus in de wrap en kruimel er wat feta overheen. Prik vervolgens de wraps dicht met sateprikkers en zet deze in de oven-schaal. Doe 4 wraps in de ovenschaal en strooi hier de geraspte kaas overheen.

Zet de ovenschaal voor 15 á 20 minuten in de oven. Wanneer de feta in de wraps is gesmolten en de geraspte kaas een beetje bruin is, is het gerecht klaar. Tast toe!

### Variatietips

- De niet vegetariërs kunnen 150 gr. gehakt en een zakje burritomix toevoegen voordat ze de spinazie in de pan doen.
- Mocht je daarentegen juist meer groente willen, dan zijn paprika, ui en courgette aan te raden.

### Wijntip

- Een griekse witte wijn (Retsina) is aan te raden •

# The statistics of extreme values in deterministic systems

BY ALEF STERK

Insurance companies need to reserve a sufficient amount of money to cover claims following extreme weather. Estimates of expected losses crucially depend on the tail index of the probability distribution describing the likelihood of extremes. Hence, computing accurate estimates of this tail index is a pressing challenge for the insurance industry and weather forecasting agencies. This article discusses some recent advances in the theory of extreme value statistics for deterministic systems.

The Extremal Types Theorem [6] describes the limiting probability distribution for the large values in a stochastic process. Let  $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$  be a sequence of independent, identically distributed random variables. We can study the large values in this sequence by defining the new random variable  $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ . Assume that there exist sequences  $(a_n)$  and  $(b_n)$  such that the rescaled variable  $a_n(M_n - b_n)$  converges to a nondegenerate distribution  $G$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(a_n(M_n - b_n) \leq x) = G(x).$$

Then the Extremal Types Theorem implies that

$$G(x) = \exp\left(-\left[1 + \xi \left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)\right]^{-1/\xi}\right), \quad (1)$$

which is the so-called Generalized Extreme Value (GEV) distribution. The parameters are the location  $\mu$ , the scale  $\sigma$ , and the tail index  $\xi$ . The last parameter is most important, as it determines the tail width of the distribution, and therefore the likelihood of extremes. Note that the parent process  $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$  can have any distribution. In this sense, the Extremal Types Theorem is universal, just like the well-known Central Limit Theorem for sums of random variables.

As an example we consider a sequence  $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$  of independent random variables having a uniform distribution on the interval  $[0,1]$ . The independence implies that for all  $x \leq 1$  we have:

$$\begin{aligned} P(M_n \leq x) &= P(X_1 \leq x, X_2 \leq x, \dots, X_n \leq x) \\ &= P(X_1 \leq x)P(X_2 \leq x) \cdots P(X_n \leq x) \\ &= x^n. \end{aligned}$$

This also shows why we need to rescale the maxima  $M_n$ . Indeed, without rescaling, the limiting distribution would be a Dirac delta at  $x = 1$ . Taking  $a_n = n$  and  $b_n = 1$  gives

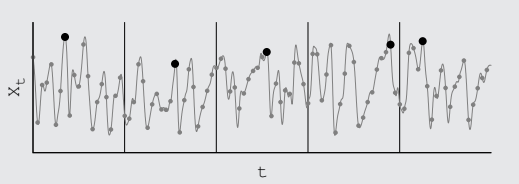
$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P(a_n(M_n - b_n) \leq x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(M_n \leq b_n + x/a_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x, \end{aligned}$$

which is indeed of the form (1) with parameters  $(\mu, \sigma, \xi) = (-1, 1, -1)$ . Other choices for  $(a_n)$  and  $(b_n)$  are also possible: in general  $\mu$  and  $\sigma$  will change, but  $\xi$  is uniquely determined.

In applications, the GEV distribution is useful to predict the probability of the occurrence of future large values of a quantity from a sample of past measurements. To that purpose, the so-called *block maximum* method is often used, see figure 1. In this method a time series is divided into sufficiently long blocks. Under the assumption that the block maxima form a random sample drawn from a GEV distribution the parameters  $(\mu, \sigma, \xi)$  can be estimated using standard statistical methods.

## Extremes in deterministic systems

In the past fifteen years the statistical theory of ex-



**FIGURE 1** Illustration of the block maximum method. A time series is divided into sufficiently long blocks and over each block the maximum value is computed (black dots). From these block maxima the parameters of an extreme value distribution can be estimated.

treme values has been extended to the setting of *deterministic* systems. In general such a system consists of a state space  $M$  (often  $M \subset \mathbb{R}^n$ ), a time set  $T$ , and an evolution operator

$$\Phi : T \times M \rightarrow M, \quad (t, x) \mapsto \Phi_t(x),$$

which satisfies

$$\Phi_0 = \text{Id}_M, \quad \Phi_t \circ \Phi_s = \Phi_{t+s}.$$

See [1] for a detailed account. Typical examples are iterated maps ( $T \subset \mathbb{Z}$ ) or differential equations ( $T \subset \mathbb{R}$ ).

The idea is to evaluate an *observable*  $\omega : M \rightarrow \mathbb{R}$  along an evolution starting at some initial condition  $x \in M$ . This gives a scalar time series

$$X_t = \omega(\Phi_t(x)), \quad t \in T, \quad (2)$$

of which the statistics of extreme values can be studied. In chaotic systems having a Sinai-Ruelle-Bowen invariant measure, the time series  $\{X_t\}_{t \in T}$  can be interpreted as a stationary stochastic process [2,8]. Note that the variables  $X_t$  are *dependent* since the underlying dynamical system is *deterministic*! Fortunately, Leadbetter et al. [6] formulated conditions under which the Extremal Types Theorem applies to time series of

dependent variables.

For a given system/observable tuple  $(\Phi, M, T, \omega)$  the task is to show that Leadbetter's conditions hold and to compute the tail index  $\xi$  of the GEV distribution. In the recent literature this has been done for several classes of systems, see e.g. [3, 4, 5]. These studies often restrict to observables of the form

$$\omega(x) = f(\text{dist}(x, \tilde{x})), \quad f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (3)$$

where  $\text{dist}(\cdot, \cdot)$  is a metric on the state space  $M$ . However, such observables are not so relevant for physical applications.

## Applications and challenges

Knowledge of extreme value statistics is particularly useful in the setting of climate models. Such models are typically derived from conservation laws for quantities like mass, momentum, and heat. These give rise to partial differential equations describing the evolution of fields such as pressure, temperature, and wind speed. Finally, discretisation leads to a system of ordinary differential equations on the state space  $M = \mathbb{R}^n$ .

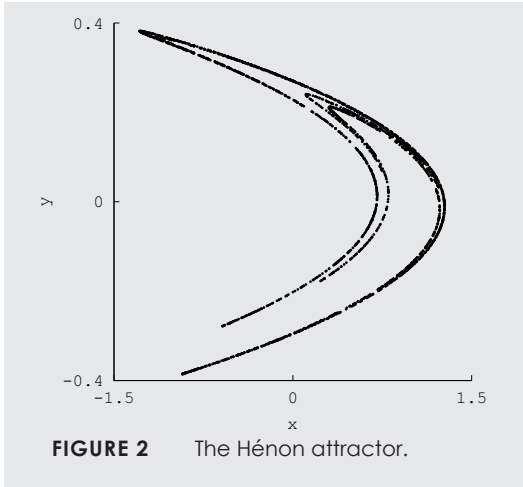
For example, in the setting of severe wind storms one can study atmospheric models equipped with observables measuring vorticity or squared wind speeds. Such observables can be modelled as respectively

$$\omega(x) = v^\top x, \quad (4)$$

with  $v \in \mathbb{R}^n$ , and

$$\omega(x) = x^\top E x, \quad (5)$$

where  $E$  is a semi-positive definite matrix. Recently, observations of the form (4) and (5) were studied for low-dimensional systems [7]. It turned out that the statistics of extreme values crucially depends on the geometry of the underlying strange attractor of the model in the sense that the tail index  $\xi$  is related to the dimensions of local stable and unstable manifolds. For certain systems such relations can be proven ana-

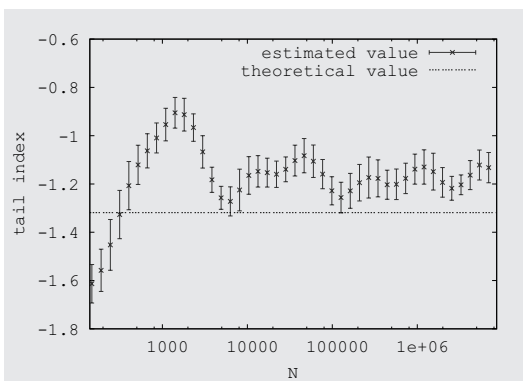


lytically, but for most systems only numerical evidence is available.

As an example consider the Hénon map given by

$$H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad H(x, y) = (1 - ax^2 + y, bx).$$

For the classical parameter values  $(a, b) = (1.4, 0.3)$  the iterates of this map are chaotic and settle down on a strange attractor, see figure 2. As observation we take  $\omega(x, y) = x$ , which is of the form (4). In [7] it was



**FIGURE 3** Estimates of the tail index  $\xi$  for the Hénon map as a function of the block length obtained by the block maximum method.

conjectured that

$$-\frac{1}{\xi} = \dim(A) - \frac{1}{2}, \quad (6)$$

where  $\dim(A)$  is the Hausdorff dimension of the Hénon attractor. This has been tested numerically by means of the earlier described block maximum method. Figure 3 shows estimates of  $\xi$  as a function of the block length  $N$ . These estimates exhibit large oscillations which make a precise estimate difficult. Accurate estimates require prohibitively long timeseries. A challenge for future research is to investigate whether formulas like (6) hold for more general systems.

## Conclusion

The statistics of extreme values in deterministic system is a rapidly expanding research area. On the one hand, one can study very fundamental questions, such as which deterministic systems admit extreme value laws. On the other hand, the theory has many applications which are relevant for society •

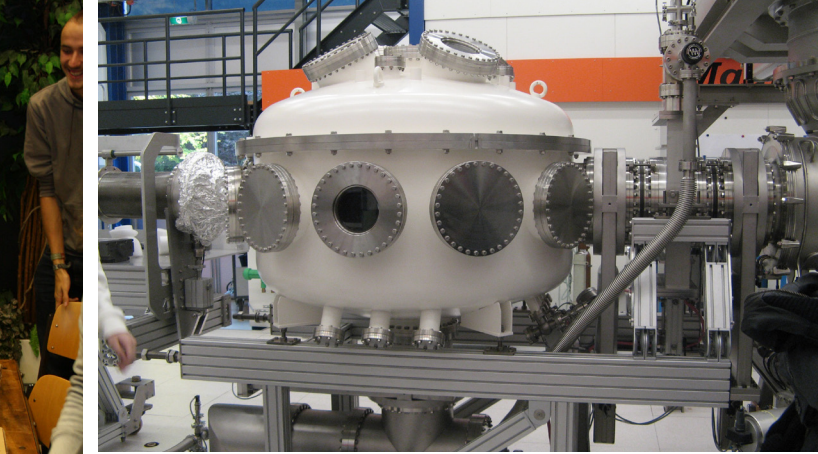
## References

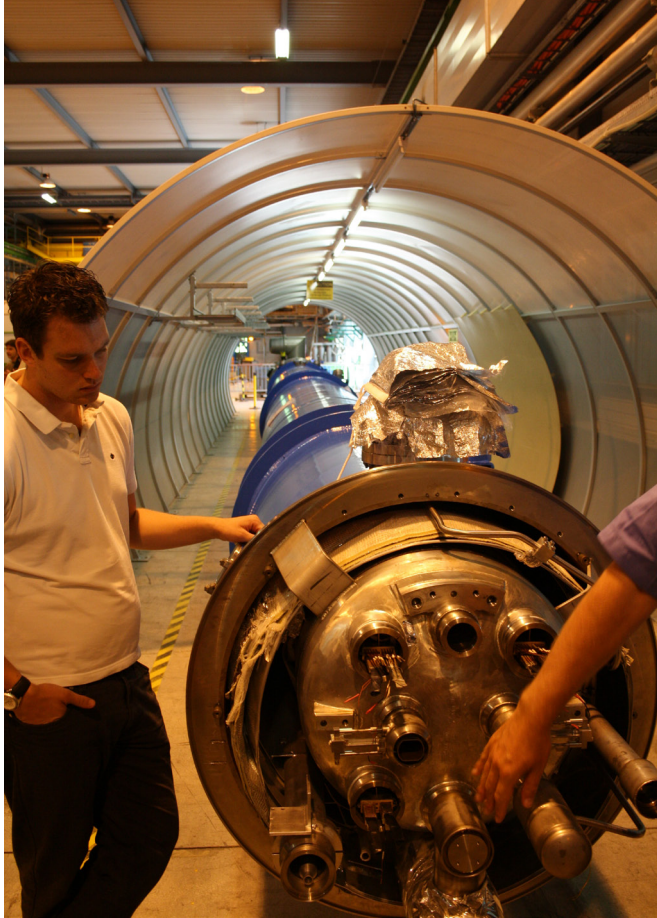
- [1] H.W. Broer, F. Takens. *Dynamical Systems and Chaos*. Springer, 2011.
- [2] C. Bonatti, L. Diaz, M. Viana. *Dynamics Beyond Uniform Hyperbolicity*. Springer, 2005.
- [3] A.C.M. Freitas, J.M. Freitas. On the link between dependence and independence in extreme value theory for dynamical systems, *Statistics and Probability Letters* 78, pp. 1088-1093, 2008.
- [4] C. Gupta. Extreme-value distributions for some classes of non-uniformly partially hyperbolic dynamical systems, *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 30, pp. 757-771, 2010.
- [5] M.P. Holland, M. Nicol, A. Török. Extreme value theory for non-uniformly expanding dynamical systems, *Transactions of the AMS*, pp. 661-688, 2012.
- [6] M.R. Leadbetter, G. Lindgren, H. Rootzen. *Extremes and Related Properties of Random Sequences and Processes*. Springer-Verlag, 1980.
- [7] M.P. Holland, R. Vitolo, P. Rabassa, A.E. Sterk, H.W. Broer. Extreme value laws in dynamical systems under physical observables, *Physica D* 241, pp. 497-513, 2012.
- [8] L.-S. Young. What are SRB measures, and which dynamical systems have them?, *J. Stat. Phys.* 108, pp. 733-754, 2002.



**PHILIPS**











# Transport, Dijkstra en Pareto

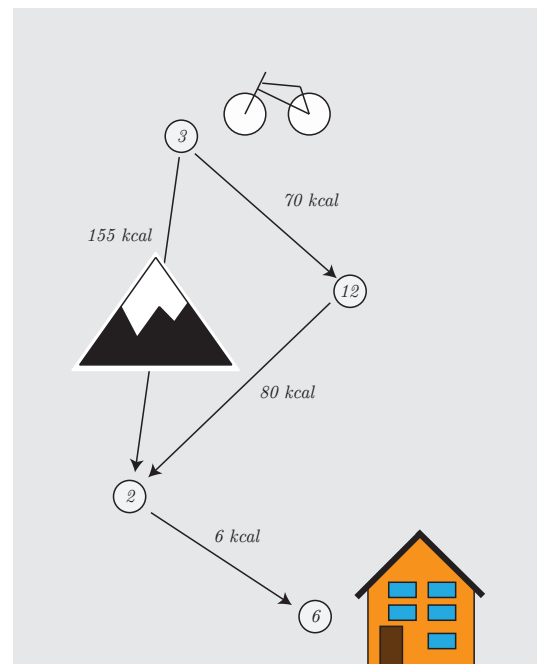
DOOR HERBERT KRUITBOSCH

Als je op de fiets stapt om naar een college te gaan, dan kies je waarschijnlijk de snelste route om 's ochtends nog zo veel mogelijk tijd aan huiswerk en zelfstudie te besteden. Kom je van de Ikea of de Leenbakker en heb je een kastje achterop je bagagedrager, dan kies je waarschijnlijk de rustigste route. Heb je vervolgens dat kastje in elkaar gezet en wil je daarna nog even hardlopen, dan kies je de meest rustgevende route. En jij bent niet de enige die zulke overwegingen maakt. Iemand die goederen wil verplaatsen, wil dat graag goedkoop doen, maar soms ook snel of juist groen. Hoe maakt hij dan de beste keuze?

Edsger Dijkstra bedacht een manier die nu het meest populair is om het kortste pad in een netwerk te bepalen. Zo'n netwerk noemen wiskundigen een graaf, en het bestaat uit knopen  $k_1, \dots, k_N$ , voor een voorbeeld zie figuur 1. Stel dat je van knoop 3 naar knoop 6 wilt, maar er is niet een directe verbinding tussen beide, dan kan het dijkstra-algoritme je adviseren om van knoop 3 naar knoop 12, dan naar knoop 2 en uiteindelijk naar knoop 6 te gaan. Dat betekent dat er een verbinding tussen knoop 3 en 12 moet zijn in de graaf, maar ook tussen knoop 12 en 2 en tussen knoop 2 en 6. Die verbindingen heten kanten:  $\{k_3 \rightarrow k_{12}, k_{12} \rightarrow k_2, k_2 \rightarrow k_6, k_3 \rightarrow k_2\}$ . In dit geval is er ook een verbinding tussen knoop 3 en 2, maar kennelijk is het handiger om via knoop 12 te gaan. Bijvoorbeeld omdat tussen knoop 3 en 2 een moeras of berg ligt, of beide. Je zou kunnen zeggen dat de driehoeksongelijkheid niet per sé geldt voor dijkstra, soms is het beter om om te fietsen. De graaf die we net omschreven kun je zien in figuur 1. Als we alles optellen hebben we voor de genoemde route dus 156 kcal nodig.

De sleutel van het dijkstra-algoritme is de volgorde waarop je kanten van de graaf overweegt, namelijk eerst de kanten die je met het minste aantal cumulatieve kcal naar een knoop brengen. In eerste instantie is dat natuurlijk de beginknoop: 3. Vanaf daar kunnen we in 70 kcal naar 12 en 155 kcal naar 2. We weten dan dat het pad  $[3 \rightarrow 12]$  het kortste pad mogelijk

vanaf 3 is, behalve natuurlijk het lege pad  $[\ ]$ , dat je nergens brengt. Dat is zo omdat elk ander pad vanaf 3 een van beide kanten met 70 of 155 kcal moet nemen en dus minstens 70 kcal moet zijn. Dat is meteen ook waarom een kant alleen maar een positief gewicht mag hebben.



FIGUUR 1 Een netwerk

Onder beschouwing	Nog mogelijk	
$[\ ]$	$[3 \rightarrow 12]$	$[3 \rightarrow 2]$
$[3 \rightarrow 12]$	$[3 \rightarrow 12 \rightarrow 2]$	$[3 \rightarrow 2]$
$[3 \rightarrow 12 \rightarrow 2]$	$[3 \rightarrow 2]$	$[3 \rightarrow 12 \rightarrow 2 \rightarrow 6]$
$[3 \rightarrow 2]$	$[3 \rightarrow 12 \rightarrow 2 \rightarrow 6]$	$[3 \rightarrow 2 \rightarrow 6]$
$[3 \rightarrow 12 \rightarrow 2 \rightarrow 6]$	$[3 \rightarrow 2 \rightarrow 6]$	

**TABEL 1** De huidige knoop en de paden onder beschouwing

Maar hoe nu verder? Dat is eigenlijk heel eenvoudig. We gaan alle mogelijke paden vanuit 3 bij langs, in volgorde van cumulatief energieverbruik: cumulatief omdat we de som nemen over alle kanten in het pad. De twee paden die we tot nu toe zagen zijn op volgorde  $[3 \rightarrow 12]$  van 70 kcal en  $[3 \rightarrow 2]$  van 155 kcal. Vanaf knoop 12 kunnen we echter naar 2, dan hebben we het pad  $[3 \rightarrow 12 \rightarrow 2]$  van 150 kcal, dat is ons nieuwe kortste pad, wat betreft energieverbruik. We weten nu nog steeds dat er geen pad vanuit 3 kan zijn dat we nog niet hebben beschouwd, dat korter is dan 150 kcal. Dan kunnen we vanuit 2 direct naar 6, volgens het pad  $[3 \rightarrow 12 \rightarrow 2 \rightarrow 6]$  van 156 kcal.

Zijn we nu klaar? Strikt genomen nog niet, want volgens het algoritme moeten we nu eerst het pad  $[3 \rightarrow 2]$  nog overwegen, omdat het 1 kcal minder heeft dan  $[3 \rightarrow 12 \rightarrow 2 \rightarrow 6]$ . Dan ontstaat het nieuwe pad  $[3 \rightarrow 2 \rightarrow 6]$  van 161 kcal. Het nieuwe kortste pad dat we nog niet hebben beschouwd is vervolgens  $[3 \rightarrow 12 \rightarrow 2 \rightarrow 6]$ , omdat we bij de eindknoop zijn. We weten meteen dat er geen korter pad kan zijn, omdat we de paden van kortst naar langer bij langs zijn gegaan. Zie ook tabel 1.

Het vorige voorbeeld ging over een kleine graaf, maar het principe geldt ook voor grotere graven. Dan kan de lijst met *nog mogelijke paden* veel langer worden en wil je een efficiënte data structuur hebben om (1) paden toe te voegen en (2) paden met het kleinste cumulatieve gewicht eruit te halen. Dat kan met een *priority queue* ( $PQ$ ), een *wachtrij* waar *lage waarden* voorrang

hebben op *hoge waarden*; niet zoals een wachtrij bij de kassa dus. Met een  $PQ$  wordt het algoritme heel eenvoudig

- a. Voeg alle kanten vanuit de beginknoop toe als paden van lengte 1 aan  $PQ$ .
- b. Zolang  $PQ$  niet leeg is:
  - (i) Haal het pad  $[\dots p \rightarrow q]$  met de laagste cumulatieve energie uit  $PQ$
  - (ii) Als  $q$  de eindknoop is, dan is  $[\dots p \rightarrow q]$  het kortste pad.
  - (iii) Voor alle kanten  $q \rightarrow r$  die vanuit  $q$  gaan, voeg  $[\dots p \rightarrow q \rightarrow r]$  toe aan  $PQ$ .
- c. Als  $PQ$  leeg is voordat de eindknoop is gevonden, dan is die niet bereikbaar.

Dit algoritme is bijna gelijk aan het dijkstra-algoritme, maar er zijn twee verschillen. Voor elke knoop wordt bijgehouden wat het tot dusver kortste pad naar die knoop is dat ooit in de  $PQ$  gestopt is. Dat betekent dus dat we in stap *ii* van **b** dus telkens kijken of het pad naar  $r$  korter is dan de huidige waarde, en eventueel de waarde aanpassen. Ook hoeven we  $[\dots p \rightarrow q \rightarrow r]$  niet toe te voegen als dat niet zo is, immers kunnen we dan al *sneller* bij  $r$  komen.

Het tweede verschil is dat niet het hele pad, maar alleen de eindknoop in de  $PQ$  wordt gestopt, dat bespaart geheugen. Voor elke knoop wordt dan alleen bijgehouden wat de vorige knoop zou moeten zijn van het kortste pad. Op die manier kun je bij de eindknoop dus eenvoudig je pad terug traceren.

## De trein

Dit algoritme kan je dus vertellen hoe je het beste met je fiets ergens heen kunt gaan. Maar stel dat je ouders niet in Groningen wonen en je naar de Randstad moet reizen. Gelukkig heb je een ov-abonnement, maar hoe plan je dan je reis?

Als je met de trein reist, dan moet je rekening houden met vertrek- en aankomsttijden, niet alleen als je weggaat, maar ook als je overstapt. Het treinnetwerk is dus net iets complexer dan het wegennet. De oplossing is echter verbluffend simpel. In plaats van een graaf waar alle knopen alleen een geografische betekenis hebben, hebben ze nu ook een tijdscomponent.

Stel dat een trein om 8.00 uur vanuit Groningen vertrekt en om 9.00 uur in Zwolle aankomt, dan is dat de kant  $(8.00, \text{Groningen}) \rightarrow (9.00, \text{Zwolle})$  in de graaf. Dan kan er een overstap knoop  $(9.00, \text{Zwolle}) \rightarrow (9.10, \text{Zwolle})$  zijn, als er tevens een verbinding van Zwolle naar Amsterdam is  $(9.10, \text{Zwolle}) \rightarrow (10.50, \text{Amsterdam})$ . Zo'n graaf heet een *time-expanded graph*, en je kunt hem gebruiken op dezelfde manier als een gewone graaf om de treinverbinding te zoeken die je het snelst brengt waar je wilt zijn.

Er zijn echter twee belangrijke punten. Je kunt natuurlijk op een station een overstap-kant toevoegen tussen alle verbindingen die eerder aankomen dan een andere verbinding. Maar dat is niet per se handig. Stel je hebt nog een  $(10.10, \text{Zwolle}) \rightarrow (11.50, \text{Amsterdam})$ , dan is de overstap-kant  $(9.00, \text{Zwolle}) \rightarrow (10.10, \text{Zwolle})$  overbodig, want niemand zal expres een uur extra willen wachten. Op die manier kun je het aantal kanten beperken en werkt het dijkstra-algoritme sneller.

Daarnaast moeten we bij stap a alle kanten toevoegen die na de gewenste vertrektijd vanuit het beginstation vertrekken. Maar dat verandert niets aan de rest van het algoritme! Een andere manier om het treinrooster te representeren is via een *time-dependent graph*, waarbij ieder station precies één knoop krijgt.

Verschillende vertrektijden worden dan opgeslagen als verschillende kanten. Dan verandert het algoritme wel wezenlijk, maar dat wordt hier niet besproken.

## Goederentransport

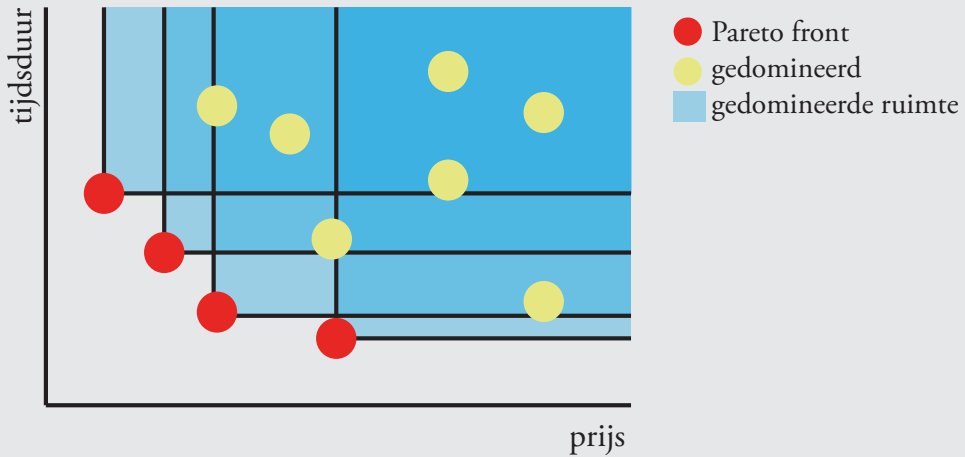
Treinen, boten en vrachtauto's die goederen vervoeren hebben vaak een geheel eigen manier waarop ze ingezet worden. Een trein vertrekt vaak pas als er voldoende lading is om boven een bepaalde winstmarge te komen, en niet per se op schema. Ook is het door weersomstandigheden lastig om de duur van een bootreis in te schatten. Vrachtauto's worden dan vaak gebruikt als duurdere, maar flexibelere oplossing om goederen op precies de juiste plek te krijgen. In werkelijkheid blijkt het dan erg lastig te zijn om het vervoer van een bepaalde lading te vervoeren en zijn er veel mensen bij betrokken.

Dat is natuurlijk een treurig uitgangspunt; maar wat nu als we wel aannemen dat er een of ander tijdschema is voor deze vervoersmiddelen, dan is de vraag van een ondernemer die wil vervoeren alsnog complexer dan die van een reiziger die naar Amsterdam wil. Een ondernemer kan bijvoorbeeld heel goedkoop uit willen zijn, of juist heel groen, heel snel of een bepaalde afwezig van alle drie.

Waar dat op neerkomt, is dat we een graaf hebben met meerdere gewichten op een kant, bijvoorbeeld voor CO<sub>2</sub> uitstoot, kosten en tijdsduur. Wanneer je dan voor alle drie gewichten dijkstra apart toepast, dan krijg je alleen de extremen en niet de nuances.

Het algoritme dat we net zagen gaat er vanuit dat we twee paden tussen  $p$  en  $q$  kunnen vergelijken, dat er één korter is of eventueel dat beide gelijk zijn. Dat kan nu niet meer, stel dat we voor duur en prijs de respectievelijk waarden (10 min, 20 euro), (15 min, 10 euro) en (20 min, 5 euro) hebben. Dan kunnen verschillende mensen een verschillende keuze maken.

Soms kunnen we de vergelijking wel maken, bijvoorbeeld (20 min, 5 euro) is wel beter dan (30 min, 5 euro) of zelfs (30 min, 10 euro). We zeggen dat (20



**FIGUUR 2** Een *Pareto-front* voor een vergelijking van de prijs tegen de tijdsduur van een reis.

min, 5 euro) domineert over de andere opties. Op die manier kunnen we voor een lijst van zulke paren een Pareto-optimum bepalen, dat is het deel van de lijst dat door geen enkel ander paar wordt gedomineerd. Dat is het *Pareto-front*, in figuur 2 zie je een voorbeeld van zo'n front voor twee gewichten: prijs en tijdsduur. Vaak heeft zo'n front een hyperbool-achtige vorm.

Met drie aanpassingen aan het algoritme kunnen we hiermee overweg. Allereerst blijven we itereren over de  $PQ$  op volgorde van cumulatieve tijd, of één van de andere gewichten. Daarnaast kunnen we niet meer stoppen als we bij de eindknoop zijn zoals in stap a van b, we moeten doorgaan tot  $PQ$  leeg is. Immers kan het zijn dat er een pad is dat langer duurt, maar bijvoorbeeld goedkoper is.

Ten slotte moeten we voor elke knoop een Pareto-front bijhouden, in plaats van alleen de snelste route. Dat betekent dat we bij stap (iii) van **b** steeds moeten controleren of een pad  $[\dots p \rightarrow q \rightarrow r]$  bij het Pareto-front van  $r$  hoort en of er paden zijn bij  $r$  die gedomineerd worden door dit nieuwe pad. Die gedomineerde paden moeten we verwijderen en negeren als we ze uit de  $PQ$  halen.

Naast de aanpassing van het dijkstra-algoritme is het een uitdaging om de graaf zo op te bouwen, zodat kanten die altijd *gedomineerd* worden, eruit worden gefilterd. Daarnaast wil je extreme elementen van het Pareto-optimum ook al vroegtijdig uitsluiten, bijvoorbeeld een heel goedkope trein die pas over 10 jaar vertrekt. Zulke aanpassingen zijn essentieel voor de snelheid van het algoritme.

Door de structuur van een graaf aan te passen kunnen we het dijkstra-algoritme gebruiken voor tijdroosters en door het Pareto-front ook om meerdere doelen tegelijk te optimaliseren. Dit gebeurt in PITS [1], een deelproject van GreCOR [2] dat groen transport in de Noordzee-regio bevordert. Dit is slechts één van de vele interessante projecten waar we bij Target Holding aan werken. Lijkt het je leuk om bij ons een stage te doen of te komen werken? Heb je affiniteit met kunstmatige intelligentie? Stuur dan een mail naar [info@target-holding.nl](mailto:info@target-holding.nl) •

## Referenties

- [1] [www.pitsmarketplace.eu](http://www.pitsmarketplace.eu)
- [2] [www.grecor.eu](http://www.grecor.eu)
- [3] [www.target-holding.nl](http://www.target-holding.nl)

# Stage in Brazilië

## *Het studentenleven in het pittoreske Ouro Preto*

DOOR ARMIN PALAVRA

Rijst met bruine bonen. Als ik iets moet kiezen wat mij het meest aan Brazilië doet terug denken dan is dat gek genoeg rijst met bruine bonen. Maar er zijn toch wel andere dingen die typisch Braziliaans zijn zou je denken? Jazeker; Cachaça, veel te koud bier, voetbal, mooi weer en exotische beesten horen zeker ook op de lijst, maar niks was zo hardnekkig aanwezig als rijst en bonen. Maar over al deze dingen later meer, laten we bij het begin beginnen.

**O**uro Preto, dat is de naam van het stadje waar ik eind mei dit jaar mijn stage begon (en toen ik begon wist ik als oud perio redactielid al dat dit stukje geschreven zou worden). De kleine stad met 70.000 inwoners voldoet niet aan het gemiddelde beeld dat mensen van Brazilië hebben. Ten eerste ligt het (helaas) niet aan de zee en lagen de tropische stran-

den voor mij niet op loopafstand. Waar Ouro Preto dan wel ligt? Midden in de bergen! Het centrum ligt op bijna 1200 meter hoogte. De stad ligt niet alleen tussen de bergen maar vooral er boven op. De mensen die in de 17e eeuw de stad hebben opgericht en gebouwd lijken niet door te hebben gehad dat ze midden in de bergen zaten. Alle straten lopen namelijk



recht de steile heuvels op en af alsof deze er niet staan en nergens is het echt vlak. Dit heeft als resultaat dat een wandeling naar de supermarkt een hele inspanning wordt. Je loopt misschien maar 500 meter, maar pakt ook ruim 50 hoogtemeters en de enorme kasseien die als tegels door moeten gaan helpen ook niet. De eerste weken was ik bij thuiskomst (ik woon hooggelegen) dan ook elke keer helemaal buiten adem. Gelukkig went het na een tijdje en nu loop ik zo de berg op.

### Rijke historie.

Zoals genoemd is de stad opgericht aan het eind van de 17e eeuw. En dat is te zien, het gehele oude centrum (wat een aanzienlijk deel is) van Ouro Preto is bewaard gebleven en wordt beschermd. De binnenstad staat dan ook op de UNESCO werelderfgoedlijst en is zeker bijzonder om te zien. Ouro Preto betekent zwart goud en verklaart de oorsprong van de stad, die tijdens de goudkoorts het middelpunt was van alle goudhandel uit de omgeving. Nog steeds is Ouro Preto omringd door veel mijnen, er is naast goud ook veel aluminium en staal in de grond te vinden. De provincie waar de stad zich in bevindt, Minas Gerais, staat bekend om haar mijnen en de provincienaam vertaalt zich dan ook naar Algemene Mijnen. Alle mijnbouw in de omgeving zorgde er ook voor dat Ouro Preto al snel een (in het begin vooral) technische universiteit kreeg. De Universidade Federal de Ouro Preto is in 1839 opgericht, wat het voor Braziliaanse begrippen een erg oude universiteit maakt. Tegenwoordig is de mijnbouw faculteit nog steeds de grootste op de universiteit, die zich inmiddels ook uitgebreid heeft met niet technische faculteiten, zoals rechten en humane studies. In totaal studeren er ongeveer 10.000 studenten, wat het een echte studentenstad maakt.



### De studenten

De leeftijd van de universiteit heeft er voor gezorgd dat de studenten er ook een grote hoeveelheid tradities op na houden. Zo wonen de meeste studenten in studentenhuizen genaamd Republicas. De oorsprong van deze naam stamt uit de tijd dat men zich probeerde te verzetten tegen het koninkrijk. De studenten

richtten zo hun eigen republiek op waar zij de baas waren en een eigen president hadden. Tegenwoordig is er nog steeds elke maand een nieuwe

*“In Salvador kon ik zien hoe Iran werd ingemaakt met 3-1.”*

president van de republicas. Dit is niet de enige regel die bewaard is gebleven, in de loop der tijd zijn er veel mores en tradities ontstaan. Zo is elke republica of mannelijk of vrouwelijk en kan vergeleken worden met de Amerikaanse fraternities en sororities. Bij een republica kan je niet zomaar komen wonen. De eerstejaars die zich bij een republica willen aansluiten zullen eerst een ontgroeningsperiode genaamd batalha (strijd) moeten doorstaan. In deze periode wordt de eerstejaars Bixo (spreek uit als biesjo) genoemd. Voor ongeveer drie maanden (het is nooit exact duidelijk hoe lang) mag de bixo alle rotklusjes in het huis doen, zo wordt door hem de telefoon opgenomen en deur opgedaan, wat bij de grootste studentenhuizen be-

tekent dat je even moet wachten tot er open wordt gedaan, want de bixo woont natuurlijk in de slechtste kamer verstopt ver achter in de kelder. Overigens is het voor de bixo niet toegestaan om alleen in een kamer te slapen, deze moet hij altijd delen met een medehuisgenoot. Maar de belangrijkste taak van de bixo is nog wel het bier in schenken. Want op de (vele) feestjes die in de studentenhuisen gehouden worden heeft iedereen zijn eigen glas bier, die netjes steeds door de bixo wordt aangevuld die rondloopt met een liter fles bier (dit gebeurt al als je halverwege bent, dus je weet nooit hoeveel bier je op hebt).

### De rest van Brazilië

Graag zou ik nog even willen aanhaken op het bier van zojuist. Want met bier in Brazilië is wat merkwaardigs aan de hand. Het bier wordt niet beoordeeld op smaak en kwaliteit, maar louter op de temperatuur en hoe kouder hoe beter. Dit gaat zo ver dat er soms blokken

ijs in het bier te vinden zijn. Maar het koude bier is lang niet zo populair als rijst met bonen. Dit is het standaard gerecht wat de Braziliaan voor zijn lunch eet, elke dag, geen uitzondering. Eerst rijst met bruine bonen, en daarna wordt er wel bepaald wat er nog bij komt. De meeste mensen eten het ook nog eens als avondeten. Ze zullen ons Nederlanders ook maar gek aankijken met al dat brood dat wij weg werken. Na een tijdje was het voor mij ook standaard kost, mede mogelijk gemaakt doordat de universiteitskantine rijst met bonen, nog een bijgerecht, fruit en drinken aanbod voor het bedrag van 0,60 euro, en dan smaakt het best prima. En andere favoriet van de Brazilianen is natuurlijk het voetbal. Nu had ik natuurlijk het privilege om in Brazilië te zijn tijdens het WK. De westerse media schetsten het beeld dat men vooral tegen het WK was. Nu viel dat in mijn beleving erg mee, alle wedstrijden werden op tv gekeken en er werden wkpooftjes gemaakt. Bij wedstrijden van Brazilië was het uitgestorven op straat, want iedereen zat binnen fana-





tiek de scheidsrechter de schuld te geven. Waar men in Nederland nog kritiek kan hebben op Robben voor het maken van een fopduik, is dit in Brazilië onmogelijk. Zelden heb ik mensen met zo'n gekleurde bril naar een voetbalwedstrijd zien kijken. Het leverde gelukkig wel leuke beelden en geschreeuw naar de tv op. Helaas kreeg ik het niet voor elkaar om kaartjes voor een van de wedstrijden van Nederland te bemachtigen. Wel is het gelukt om mijn geboorteland Bosnië te zien op hun WK debuut. In Salvador kon ik zien hoe Iran werd ingemaakt met 3-1.

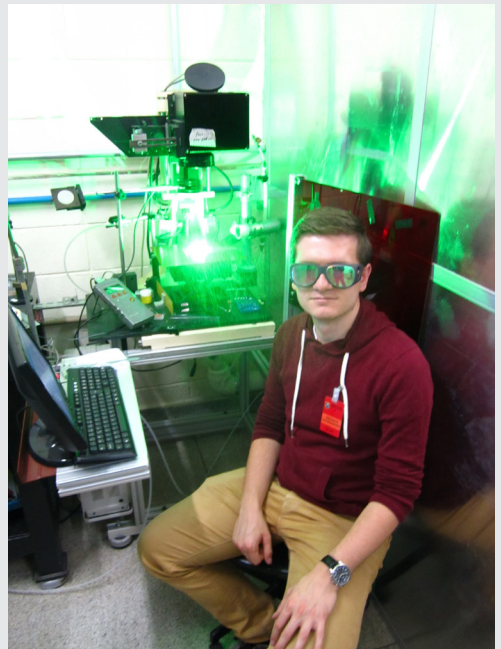
Naast Salvador heb ik nog meer plaatsen in Brazilië kunnen bezoeken. Zo heb ik een bezoek gebracht aan de enorme Iguacu watervallen en de nabijgelegen imposante Itaipu dam. Waarbij dat laatste bezoek me erg veel deed denken aan een GBE excursie, wat ook niet zo gek is, de FMF is er namelijk in 2009 ook op bezoek geweest (al heb ik geen FMF sticker kunnen vinden). Uiteraard heb ik ook een bezoek gebracht aan Rio de Janeiro, op 'slechts' 600km afstand van Ouro Preto. Maar het mooiste stukje Brazilië was Ilha Grande. Een tropisch eiland ongeveer 300 km verwijderd van Rio dat alles heeft wat je van een tropisch eiland verwacht. Van exotische beesten zoals slangen, kolibries, schildpadden en aapjes bij het ontbijt, tot de witte stranden met palmbomen en het huisje in de jungle met een hangmat, alles was aanwezig.

## Stage

Nu zou je bijna denken dat ik alleen maar op vakantie ben geweest, toch ben ik de meeste tijd bezig geweest met mijn stage. Ik heb een project gedaan voor de Braziliaanse vliegtuigfabrikant Embraer. De vleugels van hun vliegtuigen bestaan voornamelijk uit met koolstofvezel versterkte polymeren. Maar het voorste deel van de vleugel moet sterker zijn om alle frictie en impact van vogels te kunnen opvangen. Dit deel wordt daarom van een titanium legering gemaakt. Momenteel worden de twee verschillende materialen aan elkaar geschroefd, maar Embraer wil in de toekomst lijm gaan gebruiken. Het onderzoek wat ik gedaan heb, gaat kijken of het mogelijk is om de te lijmen oppervlaktes beter aan elkaar te laten hechten door ze te

behandelen met een sterke laser. Door het oppervlak op de juiste manier met een laser te bestralen zal deze ruwer worden, wat hopelijk tot betere hechting leidt. Uiteraard wordt er dan ook gekeken naar wat de correlatie is tussen de gebruikte laser parameters en de ruwheid van de oppervlaktes, maar ook het verband tussen de ruwheid en de hechting van de lijm werd onderzocht. De voorlopige conclusie is dat een laserbehandeling voor de hechting van titanium zeker nu heeft. Bij een koolstofvezel werkt dit averechts omdat de structuur van de vezel beschadigd raakt en het materiaal breekt nog voor de lijm los komt.

Al met al heb ik een geweldige tijd gehad hier in Brazilië, vele nieuwe vrienden gemaakt en prachtige plaatsen bezocht. In de tussentijd heb ik zelfs ook nog een stage af kunnen handelen! Weer terug in Nederland zal de rijst met bonen weer vervangen worden door een simpele bruine boterham met kaas •



# Conformal Field Theory

## *And the Conformal Bootstrap*

BY GIDEON VOS

Symmetry plays an extremely important rôle in contemporary physics. In principle, an endless amount of physical theories can be postulated, each with their own particles and dynamics. The amount of theories that we consider relevant for physical application is often limited by the symmetries that we observe or believe to exist in nature, and therefore have to manifest itself mathematically. You may know that all the particles that we observe in nature - some even predicted before they were discovered - and three out of four fundamental forces can be shown to be the result of postulating that the universe has an internal symmetry mathematically classified as  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ .

It turns out that our best models for relativistic quantum mechanics are unfortunately very difficult to the point that most theories are not solvable by currently known mathematical techniques and in a lot of cases it isn't even clear how "a physicist's intuition" can be defined mathematically, e.g., what is a path integral in Minkowski space anyway? In general, every symmetry that we add to a theory adds constraints and therefore makes a theory more treatable. Add too many constraints though and you end up with a theory that is trivial and therefore uninteresting. This is where the Coleman-Mandula theorem comes in. This theorem states that the conformal group is the "biggest" external symmetry group that we can have in an interacting non-supersymmetric field theory. For this reason, Conformal Field Theories (CFTs) are the most symmetric theories that we can construct that can still have all the complicated features of a quantum field theory that we would like to have a better understanding of.

### Quantum Field Theory review

Before moving on, let us first answer the question: why do we need quantum field theory in the first place? After all, at the non-relativistic regime where we spend our entire lives, non-relativistic quantum mechanics seems to be an accurate description of nature. The conflict between these theories already manifests itself

on a conceptual level though. Quantum mechanics as a theory is inherently non-local, as in all the dynamical information of a quantum system is locked up in an abstract mathematical object, the quantum state. This state largely takes over the rôle of position and momentum from classical mechanics and does not necessarily have to depend on any spatial coordinates - think spin states, for instance. The Schrödinger equation completely specifies in what state our system will be at any point in the future given the present state, therefore space and time are very separate concepts.

Relativity on the other hand is a theory that is largely build on the concept of location. For instance, if someone affects the state of the universe at some point in time and space, then an observer at some point far away in space, should not be able to notice this in any way if light wasn't able to travel between their locations. Non-relativistic quantum mechanics does not have this sort of considerations build in from the start, so something has to be modified.

The historic solution is to upgrade to local operators. Remember that the cornerstone of quantum mechanics is uncertainty in measurement. (The more exact phrasing is that superposition of states is the cornerstone of quantum mechanics.) To model this, we upgrade observables to operators and simply attribute every possible outcome a measurement could have to

an eigenvalue of these operators<sup>1</sup>. The difference being that we no longer consider operators that contain global information of our system, but instead attribute an operator to every point in spacetime that for instance detects in how far a measure a type of particle is located at this point and consider this “field” of operators, hence quantum field theory. We think of this operator-valued field as acting on some sort of underlying vacuum state. This leads to a large shift in physical interpretation, in quantum field theory, we no longer look at individual particles as the dynamical objects of the theory. Instead, the field itself is a dynamical object and satisfies some equation of motion; it is the excitations, i.e., wobbles, of this field, what we observe as particles.

## Conformal Symmetry

Now that it is established why we bother with local operators, let us get to the main point: conformal symmetry. A conformal transformation is any transformation that preserves the angle between two intersecting curves. Any physical theory in which everything that can be observed changes in some predictable way under conformal transformations, is considered to be a conformal theory<sup>2</sup>.

On a Minkowski background, it is clear that all Poincaré transformations, i.e., translations, rotations and Lorentz boosts, are conformal transformations. The reason for this is that they preserve scalar products between vectors and therefore preserve angle. Another

1 For all its mathematical structure and experimental success, quantum mechanics looks like a rather primitive business. Bluntly put, we do not know what will happen, since we have no idea what mechanism nature uses to select a state at observation, but we do know everything that could happen and it turns out that all these things happen simultaneously with different probabilities. Therefore, we just follow the probability of every possible outcome through time and calculate some expectation values.

2 As an analogy to spherical symmetry, remember that the wave function of an electron flips sign under full rotations, even though it is spherically symmetric. Similarly, we just want that a conformal field theory changes in some predictable way under conformal transformations and not that it is strictly invariant under transformations.

simple transformation is to rescale all of spacetime by a constant factor; the effect on the four-vectors would be like  $x'^{\mu} = \alpha x^{\mu}$ , for some number  $\alpha$ . Finally, it can also be shown that the angle is preserved under so-called special conformal transformations. These consist of a spacetime inversion,  $x^{\mu} \rightarrow x^{\mu}/|x|^2$ , followed by a translation, followed by another spacetime inversion. The conjoined effect looks like

$$x^{\mu} \rightarrow \frac{x^{\mu} - b^{\mu} x^2}{1 - 2b_{\nu} x^{\nu} + b^2 x^2},$$

for some translation vector  $b^{\mu}$ . Together these coordinate transformations represent the elements of the conformal group.

## Conformal Field Theory

What is typically done in normal quantum field theory, when doing particle physics for instance, is to calculate scattering amplitudes. To do this we need to calculate the  $N$ -point correlation functions by summing up over all the possible things that could have happened in between these points.  $N$ -point functions capture the correlations between excitations of the field at  $N$  different points in spacetime. A 2-point function for instance basically says that given that there is a bump in the field at a certain point in time and space, what will then be the probability that we will detect another bump in the field five minutes later, two meters away. Because of this, if we know all the possible  $N$ -point functions, we essentially know all the dynamical information of the theory.

In conformal field theory on the other hand, conformal symmetry provides such a strong constraint that the 2- and 3-point functions between a special class of operators are completely fixed up to a numerical constant. The 2-point function between two conformal primaries is given by

$$\langle O_1(0)O_2(x) \rangle = \frac{c_{12}}{|x|^{2\Delta}},$$

and the 3-point function is given by

$$\langle O_1(x)O_2(y)O_3(z) \rangle = \frac{c_{123}}{|x-y|^{\Delta_1+\Delta_2-\Delta_3}|y-z|^{\Delta_2+\Delta_3-\Delta_1}|z-x|^{\Delta_3+\Delta_1-\Delta_2}}.$$

It is analogous to how rotational invariance fixes the electric potential of a point particle to only depend on radius and not on angle.

Because these correlations are fixed, unlike in “normal” quantum field theory, we can derive information about what has to have happened between our initial and final state, since we know what all these intermediate states have to sum up to.

## The operator spectrum

As will be explained in the next section, which will cover the operator product expansion, finding out everything that could have happened between our initial and final state, comes down to finding what local operators are contained in the CFT we are interested in. The set of all operators contained in a CFT is called the spectrum of that theory.

In the previous section, it was mentioned that there is a special class of operators; these operators are the conformal primaries. These are the local operators that, when inserted at the origin of spacetime, creates a state that transforms under scale transformations as  $O(x)|0\rangle \rightarrow |x|^\Delta O(x)|0\rangle$  where  $\Delta$  is the so-called scaling dimension or conformal dimension associated with the primary<sup>3</sup>.

Of course, there exist more operators in the spectrum than just the primaries. We can find out some properties of these other operators by looking at infinitesimal conformal transformations. For instance, an infinitesimal translation would look like

$$|\psi(x_\mu + \epsilon_\mu)\rangle = |\psi(x_\mu)\rangle + \epsilon^\nu \partial_\nu |\psi(x_\mu)\rangle + O(\epsilon^2),$$

and an infinitesimal dilation (scale transformation)

<sup>3</sup> In technical terms: the conformal primaries when inserted at the origin create eigenstates of the dilatation generator of the conformal algebra with eigenvalue  $-i\Delta$ .

would look like

$$|\psi((1+\epsilon)x_\mu)\rangle = |\psi(x_\mu)\rangle + \epsilon x^\nu \partial_\nu |\psi(x_\mu)\rangle + O(\epsilon^2).$$

These expressions can be found by Taylor expanding the left-hand sides and cutting off everything after the linear term. Note that there are just as much translations as there are dimensions, but there is only one scale transformation. With some knowledge of Lie-algebras, we can conclude from the expressions above that the coordinate representation of the generators of these transformations are respectively given by  $P_\mu = i\partial_\mu$ ,  $D = ix^\nu \partial_\nu$ .

Let us look at what kind of effect the translation generators have on eigenstates of the dilatation operator. Applying the product rule of differentiation and rearranging the terms shows that

$$DP_\mu |\psi(x)\rangle = -i(\Delta + 1)P_\mu |\psi(x)\rangle.$$

The conclusion is that the translation generators act as raising operators on the conformal primaries. With a bit more work, it can similarly be shown that the special conformal transformation generators act as lowering operators and annihilate the conformal primaries. Therefore we can categorize all operators in the spectrum as either being primaries or descendants. Every operator that is not a primary operator can be constructed by acting with enough translation generators on a primary.

## The operator product expansion

Knowing the 2- and 3-point functions is a start, but what we really need in order to “solve” a CFT are the  $N$ -point functions. We can go beyond the 3-point function through applying another crucial feature of conformal field theories, the operator product expansion. Inside an  $N$ -point function, we can express any product of operators as a sum over conformal primaries

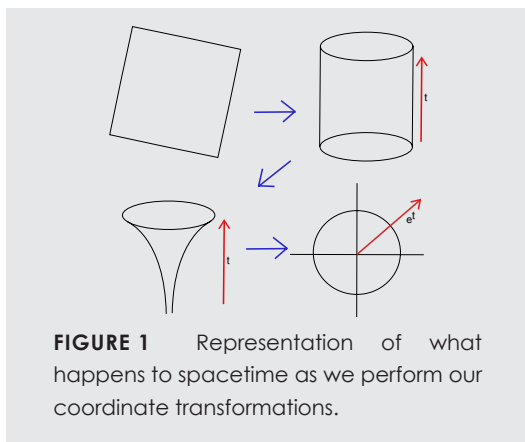
$$O_1(0)O_2(x) = \sum_{O^{(k)}} \frac{c_{12k}}{|x|^{\Delta_1+\Delta_2-\Delta_k}} \frac{x^{\mu_1} \cdots x^{\mu_s}}{|x|^s} O_{\mu_1 \cdots \mu_s}^{(k)}(x).$$

The  $x$ -dependence on the right-hand side looks complicated, but it simply ensures that both sides of the equation have the same length dimension. Using this, we can reduce any  $N$ -point functions to a sum over  $(N - 1)$ -point functions. By doing this iteratively, we eventually reduce any  $N$ -point function to a large sum over 2-point functions. This clarifies the earlier statement that we need to know the spectrum of a CFT, since it turns out that if we could find spectrum and all the Operable Product Expansion (OPE) coefficients (the  $c_{12k}$  numbers) of a CFT, we have essentially solved the CFT.

The fact that this so-called operator product expansion is even possible is quite special, notice that the left-hand side is non-local it depends on more than one point in spacetime, the right-hand side on the other hand is decidedly local. Let us do some coordinate transformations of the background Minkowski space to see why this can be done.

First, add a point at spatial infinity to the Minkowski background. This way we compactify the space into a generalized cylinder,  $S^{d-1} \times \mathbb{R}$ , where time plays the rôle of the longitudinal coordinate. From this point onward, we can abuse scale invariance. For any given time slice of our cylinder, we can change radius of space and all the physics on the slice should change in a simple way. So, let us do an exponential map where we let the radius of the cylinder depend exponentially on time. The result is that at temporal positive infinity, the radius goes to infinity, but more importantly, at negative temporal infinity, the entirety of space contracts to a single point. Now, mentally picture our distorted cylinder collapsing into a plane (see figure 1). The result is a filled sphere where time plays the rôle of the radial coordinate and as we go further into the past, the more space gets contracted.

As was mentioned in the introduction in quantum mechanics, we can form a current state to a future state via a unitary operator called the time-development operator. Note now that the current quantum state of the universe is in our coordinates defined on a shell in our filled sphere. We can use the inverse of



**FIGURE 1** Representation of what happens to spacetime as we perform our coordinate transformations.

this operator though to take any state on a time slice and map it to the past as far as we like, therefore all the information of our current universe can, in some sense, be stored in this one point in the centre of the sphere. Therefore, we can map the state, created by the bi-local product of operators, back to the origin; here we can decompose it into a basis. For instance, we decompose it into all the states created by acting with the entire operator spectrum on the origin of spacetime. This explains the origin of the operator product expansion; as can be seen it is a genuine basis decomposition and not an asymptotic approximation.

### Conformal block decomposition

What can we derive from the four-point function of scalar operators? When dealing with four-points, we can construct so-called conformal cross-ratios or anharmonic ratios:

$$u = \frac{(x_1 - x_2)^2(x_3 - x_4)^2}{(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_4)^2},$$

$$v = \frac{(x_1 - x_4)^2(x_2 - x_3)^2}{(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_4)^2}.$$

They are conformal invariants, meaning that they maintain the same value after conformal transformations. Unfortunately, this means that the 4-point function, unlike the 3- and 2-point functions, is not fixed by symmetry, as it could be any function of these cross-ratios.

What we can do is take the OPE between two pairs of operators in the 4-point function and work out the resulting double-sum over 2-point functions. If we group together all the terms related to a single primary and all of its descendants then we get something like

$$\begin{aligned} \langle \overbrace{O_1(x_1)O_2(x_2)} \overbrace{O_3(x_3)O_4(x_4)} \rangle = & \\ \frac{1}{(x_1 - x_2)^{\frac{1}{2}(\Delta_1 + \Delta_2)}(x_3 - x_4)^{\frac{1}{2}(\Delta_3 + \Delta_4)}} & \\ \left( \frac{x_2 - x_4}{x_1 - x_4} \right)^{\frac{1}{2}(\Delta_1 - \Delta_2)} \left( \frac{x_1 - x_4}{x_1 - x_3} \right)^{\frac{1}{2}(\Delta_3 - \Delta_4)} & \quad (1) \\ \sum_k c_{12k} c_{34k} G\left(\frac{1}{2}(\Delta_k - \Delta_1 + \Delta_2 - s), \right. & \\ \left. \frac{1}{2}(\Delta_k - \Delta_3 + \Delta_4 - s), \Delta_k; u, v\right). & \end{aligned}$$

Here  $\Delta_i$  is the scaling dimension of the operator  $O_i$  and  $c_{ijk}$  are the OPE coefficients. The contractions above the operators on the left-hand side indicate how we take the OPEs. The function  $G(a, b, \Delta_k; u, v)$  is called a conformal block or conformal partial wave, it encodes all the information of a primary and its descendants. Series representations were known for the conformal blocks since the seventies, but at the start of the 21st century F.A. Dolan and H. Osborn have been able to find closed-form expressions for the conformal blocks in four spacetime dimensions in terms of hypergeometric functions. They did this by solving the eigenfunctions of the coordinate representation of the Casimir operator of the conformal group in lightcone coordinates. Therefore, the conformal partial wave decomposition in equation (1) is analogous to decomposing spin states into spherical harmonics.

## Conformal bootstrap

The way the pairs of operators were contracted in the previous section, is in a sense arbitrary. As long as both OPEs converge, the results should be the same, for instance

$$\begin{aligned} \langle \overbrace{O_1(x_1)O_2(x_2)} \overbrace{O_3(x_3)O_4(x_4)} \rangle = & \\ \langle \overbrace{O_1(x_1)O_2(x_2)O_3(x_3)} \overbrace{O_4(x_4)} \rangle. & \end{aligned}$$

The left-hand side is typically called the s-channel and the right-hand side the t-channel. This leads to an extremely powerful restriction on both the content of the operator spectrum as well as the OPE coefficients. This demand, that both ways of calculating the 4-point functions are internally consistent, is called the conformal bootstrap. In the past, it was thought that the conformal bootstrap was severe enough a restriction to find analytical solutions for any CFT. The reason for this is that there appears to be a one-to-one correspondence between the amount of equations it creates and the amount of unknowns that are present. So far, this hope has not been realised yet, but some other strong results have been found. For instance, it can be shown that if you take all the operators in the four-point function to be identical and a scalar with conformal dimension  $\Delta$ , then the identity operator that has to appear in the t-channel demands that there have to exist infinite sets of operators in the spectrum with conformal dimension close to  $2\Delta + 2N + s$  with spin  $s$  for any integer  $N$ .

## Closing remarks

Over the last 15 years, there has been a strong resurgence in interest in conformal field theory. The Anti-De Sitter (AdS)/CFT duality conjectured in 1997 has renewed interest in CFTs. This duality states that there exists a connection between a CFT and string theory in Anti-De Sitter space. As such, CFTs may be our best bet to find out what a string theory actually is beyond the perturbative level, which is something that is not known at this point in time •

## References

- [1] P. di Francesco, P. Mathieu and D. Senechal; *Conformal Field Theory*, Springer Science Business Media, 1997
- [2] R. Blumenhagen, E. Plauschinn; *Introduction to Conformal Field Theory with Applications to String Theory*, Springer, 2009
- [3] O. Aharony, S.S. Gubser, J. Maldacena, H. Ooguri and Y. Oz; *Large N Field Theories, String Theory and Gravity*, [ArXiv: 9905111 [hep-th]]



Jouw persoonlijke ontwikkeling staat centraal bij Talent&Pro.



*“Bij Talent&Pro krijg ik de kans om mezelf continu te verbeteren.”*

*Mitchel Bouwmeester, Talent*

## Werken met cijfers: dát is wat je leuk vindt!

Formules uitpluizen en berekeningen maken. Je kunt met jouw bèta-achtergrond als onderzoeker of docent aan de slag, maar met jouw probleemoplossend vermogen kom je ook als geroepen voor de financiële sector.

Als actueel specialist van Talent&Pro los je complexe vraagstukken op voor grote financiële instellingen, zoals ASR, ABP of SNS Reaal. Je werkzaamheden variëren van het bepalen van premietarieven tot het analyseren van risico's.

Zo ontwikkel je jezelf snel van Talent tot Professional. De functie van actuaaris is niet voor niets al 4 jaar op rij tot 'beste baan van Nederland' gekozen door Elsevier en SEO Economisch Onderzoek!

Kies ook voor een goed begin van je carrière! Bekijk onze vacatures op [talent-pro.com](https://talent-pro.com) en solliciteer.

# Gevaarlijke golven

DOOR ARTHUR VELDMAN

Verhalen van vissers over golven van zo'n 30 meter hoog die plotseling, als uit het niets, voor hun schip opdoken werden lange tijd afgedaan als visserslatijn. Maar sinds we satellietopnamen kunnen maken van het oceaanoppervlak, weten we dat dergelijke monstergolven (in het Engels: *rogue waves*) wel degelijk regelmatig voorkomen.

De eerste goed gedocumenteerde monstergolf is de zogenoemde *New Year Wave* van 26 meter hoog, die het Draupner Platform trof op 1 januari 1995. Dit offshoreplatform bevindt zich voor de kust van Noorwegen, in het deel van de Noordzee waar olie en gas wordt gewonnen. Ook de raadselachtige verdwijning van diverse grote schepen midden op de oceaan wordt aan deze monstergolven toegeschreven. Oceanografen en meteorologen zoeken daarom intensief naar de oorzaak van deze extreme golven, en scheepsbouwers willen weten hoeveel schade zulke golven kunnen aanrichten aan hun schepen en offshoreplatforms (zie figuur 1).

Dichter voor onze kust, waar nieuwe windmolenparken worden aangelegd, zijn de golven iets minder hoog, maar voor iele windturbinetorens net zo gevaarlijk.

Bij het Maritiem Research Instituut MARIN in Wageningen wordt daarom met modelproeven onderzoek gedaan naar de krachten die vrijkomen wanneer extreme golven tegen olieplatforms en windturbinetorens beuken. In enorme waterbassins, tot 250 meter lang, worden grote golven opgewekt en losgelaten op schaalmodellen. Parallel hieraan proberen wij bij de groep Technische Mechanica en Numerieke Wetkunde met behulp van computerberekeningen inzicht te krijgen in het gedrag van dergelijke golven. Hiertoe ontwikkelen we steeds betere modellen en snellere oplosmethoden. De resultaten van deze berekeningen worden gevalideerd met de zojuist genoemde experimenten. Deze samenwerking met het MARIN stimuleert beide partijen om steeds een stapje verder te komen: wij nauwkeurigere modellen, het MARIN nauwkeurigere metingen. Of zoals we aan de RUG zeggen, dit is echt "Werken aan de grenzen van het weten".



FIGUUR 1 Een "monopile"-platform in zware golven.

## Modelleren en simuleren

Hoe werkt dat nu, dat nabootsen, "simuleren", van grote golven met behulp van een computer? De eerste stap is het opstellen van een beschrijving van de relevante fysica in wiskundige termen: een *wiskundig model*. Niet al te hoge golven blijken heel aardig beschreven te kunnen worden met behulp van gelineariseerde potentiaaltheorie (zie bijvoorbeeld het college Stromingsleer): er bestaat een snelheidspotentiaal  $\Phi$



met bijbehorende snelheidsvector  $\mathbf{u} = \nabla\Phi$ . Hierin is  $\nabla$  de nablaoperator waarmee je gradiënt ( $\nabla$ ) en divergentie ( $\nabla \cdot$ ) kunt vormen.

Massabehoud kan worden geformuleerd als  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ , zodat de potentiaal voldoet aan  $\nabla \cdot \nabla\Phi = 0$ . Deze potentiaalvergelijking wordt ook wel *vergelijking van Laplace* genoemd.

De vergelijking moet voorzien worden van randvoorwaarden om een eenduidige oplossing op te leveren. De bodem van de oceaan, met normaal  $\hat{\mathbf{n}}$ , wordt ondoorlaatbaar verondersteld, dat wil zeggen,  $\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$ .

Op het wateroppervlak  $z = \eta(x, t)$ , met  $x$  de horizontale coördinaat en  $z$  de verticale, moet de snelheid van de waterdeeltjes  $\mathbf{u} = \nabla\Phi$  passen bij de verplaatsing van het wateroppervlak  $\partial\eta/\partial t$ . Deeltjes op het oppervlak moeten daar blijven, hetgeen leidt tot de *kinematische* randvoorwaarde met gelineariseerde vorm

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = \frac{\partial\Phi}{\partial z}. \quad (1)$$

Verder moet op het oppervlak de waterstroming netjes aansluiten op de lucht: de druk in het water moet gelijk zijn aan de atmosferische druk. Dit leidt tot de zogenoemde *dynamische* randvoorwaarde, waar de in Groningen geboren Daniel Bernoulli een belangrijke bijdrage aan heeft geleverd. Gelineariseerd luidt deze

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + g\eta = 0, \quad (2)$$

met  $g$  de versnelling van de zwaartekracht.

De vergelijking van Laplace zijn jullie vast al diverse keren tegengekomen tijdens de colleges. Je hebt dan geleerd dat je oplossingen kunt zoeken via separatie van variabelen: probeer oplossingen te vinden van de vorm  $\Phi(x, z) = X(x)Z(z)$ . Enig cijferwerk leert dat deze worden van de vorm  $\Phi(x, z) = e^{ikx}e^{kz}$ , waarbij het golfgetal  $k$  willekeurig is. We zien dat dit type oplossing in horizontale  $x$ -richting een golfgedrag heeft, met golflengte  $2\pi/k$ , en zich in verticale  $z$ -richting exponentieel gedraagt. Als we periodieke oplossingen in de tijd (met frequentie  $\omega$ ) beschouwen, dan krijgen de

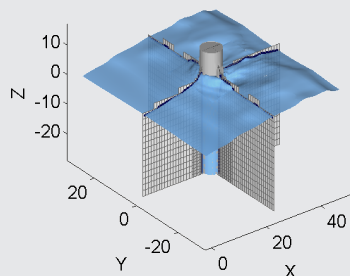
oplossingen de vorm

$$\Phi(x, z, t) = e^{i(\omega t \pm kx)} e^{\pm kz} \quad (3)$$

Aan het  $\pm$ -teken in het argument van de eerste  $e$ -macht herken je dat er twee soorten watergolven zijn: het plusteken correspondeert met naar links lopende golven, het minteken met naar rechts lopende. Hun voortplantingssnelheid is  $c = \omega/k$ . Wanneer we de vorm (3) combineren met de bovengenoemde randvoorwaarden op het vrije wateroppervlak en op de bodem, dan leidt dat tot een relatie tussen de frequentie  $\omega$ , het golfgetal  $k$  en de waterdiepte  $h$ . Deze relatie luidt  $\omega = \sqrt{gk \tanh kh}$  met  $g$  de versnelling van de zwaartekracht. De voortplantingssnelheid van watergolven wordt hiermee

$$c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k} \tanh kh}. \quad (4)$$

In ondiep water, waar de diepte veel kleiner is dan de golflengte, dat wil zeggen,  $kh \ll 1$ , geldt  $c \approx \sqrt{gh}$ , dat wil zeggen, alle golven lopen even snel. Op diep water ( $kh \gg 1$ ) geldt  $c \approx \sqrt{g/k}$  en de voortplantingssnelheid hangt af van het golfgetal: hoe langer de golf, dat wil zeggen, hoe kleiner  $k$ , hoe sneller een golf loopt. Dit verschijnsel heet *dispersie* en (4) heet dan ook de dispersierelatie. Merk op dat wanneer de lengte van een golf en de waterdiepte zijn gegeven, zijn frequentie en voortplantingssnelheid vast liggen.



**FIGUUR 2** Een windturbinetoren met een (grof) rekenrooster. Nabij het object zijn de roosterzellen verkleind voor een betere resolutie.



**FIGUUR 3** Een model van een windturbine in één van de waterbassins van het MARIN.

De dispersierelatie (4) is verantwoordelijk voor het mooie V-patroon dat je achter zwemmende eendjes ziet, en trouwens ook achter grote schepen als het water diep genoeg is.

Nu we het wiskundig model onder de knie hebben, kunnen we dit in een computer gaan stoppen. Je hebt hier allereerst een rekenrooster voor nodig dat het stromingsgebied dat je wilt berekenen overdekt (zie figuur 2). Daarna moet je de vergelijkingen discretiseren, dat wil zeggen, benaderingen bepalen van de afgeleiden die in de vergelijking voorkomen. Vervolgens moet je een tijdsintegratiemethode uitkiezen, en tot slot het zo ontstane stelsel oplossen. In de colleges over numerieke wiskunde leer je alle “geheimen” die je hiervoor nodig hebt.

### Absorberende randvoorwaarden

Je kunt natuurlijk niet een hele oceaan in je computer stoppen, dus moet je het rekengebied afkappen. Daardoor ontstaan er zijranden aan het rekengebied, waar de golven aan de ene kant binnenkomen en aan

de andere rand het gebied weer “netjes” verlaten. Tenminste, dat is de bedoeling. In een zwembad, met vaste randen, zie je heel mooi dat golven die tegen de rand aankomen worden gereflecteerd - om dit te verminderen is de rand van een zwembad speciaal gevormd. Midden op de oceaan is er niets dat reflecteert; in onze berekeningen moeten we er dan ook voor zorgen dat golven ongestoord het rekengebied kunnen verlaten. Dit doen we met zogenaamde niet-reflecterende (of absorberende) randvoorwaarden; in het Engels ABC: *absorbing boundary conditions*. Hierover nu iets meer.

Om uit te leggen hoe je dergelijke ABC randvoorwaarden kunt ontwerpen, kun je kijken naar de tweede-orde *golfvergelijking*

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0. \quad (5)$$

Ook deze vergelijking hebben jullie waarschijnlijk al eens gezien. Je weet dan dat er twee soorten oplossingen zijn:  $\phi = f(x - ct)$  en  $\phi = g(x + ct)$ , naar rechts lopende golven, respectievelijk naar links lopende golven. Merk op dat de golven in (4) van dit type zijn. Aan de rechter rand van het gebied willen we geen reflecties toelaten, dat wil zeggen, er mag geen golf naar binnen lopen. Er moet daar dus gelden  $g = 0$ . Om dit uit te werken, herschrijven we de golfvergelijking (5) als

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi = 0.$$

De eerste factor genereert een naar links lopende golf en we nemen daarom  $g \equiv \left( \frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi$ . Zoals net uitgelegd willen we niet dat zo'n golf aan de rechter rand het rekengebied binnenkomt, zodat de eis  $g = 0$  overgaat in

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)\phi = 0.$$

Dit wordt een *Sommerfeld randvoorwaarde* (Engels: *radiation condition*) genoemd. We leggen nu deze relatie op aan het rechter uiteinde van ons rekengebied. Een probleem is dat hierin de voortplantingssnelheid  $c$  voorkomt en we hebben net gezien dat deze op diep water afhangt van het golfgetal  $k$ . We moeten dus op een of andere manier een schatting voor het golfgetal zien te verzinnen. Bekijk nu de  $z$ -afhankelijkheid van de vorm (3) en merk op dat

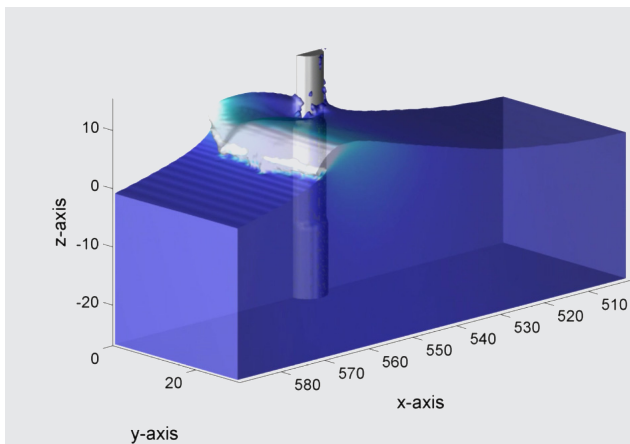
$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = k^2 \Phi.$$

Met deze relatie kunnen we uit naburige waarden van  $\Phi$  de  $k$  bepalen en daarna levert de dispersierelatie (4) de bijbehorende voortplantingssnelheid.

## Valideren

We zijn nu gereed om de computer te laten rekenen, om vervolgens te kijken naar de resultaten die eruit komen. Maar zijn deze wel betrouwbaar? Hiertoe komen we bij de derde stap: het *valideren* van het model. Hier komt het MARIN in actie. Zij kunnen in hun waterbassins modelproeven uitvoeren waarmee we onze rekenresultaten kunnen vergelijken (zie figuur 3). Indien nodig kunnen we daarna het model proberen te verbeteren. Ook daarbij komt de samenwerking met het MARIN van pas, omdat zij beschikken over de specialistische kennis van de toepassing. Dit is dus een fase met intensieve samenwerking tussen de theoretici met hun numeriek-wiskundig computermodel en de experimentatoren met hun fysische schaalmodel.

In het geval van de studie van windturbines kan ik over de vergelijking tussen berekening en experiment nog niet veel laten zien, omdat het onderzoek nog in volle gang is. Voor eerdere toepassingen, bij andere constructies, verwijs ik naar de website van onze simulatiemethode ComFLOW: [www.math.rug.nl/~veldman/comflow/comflow.html](http://www.math.rug.nl/~veldman/comflow/comflow.html).



**FIGUUR 4** Voorbeeld van een ComFLOW-berekening van een golf die een windturbinetoren “aanvalt”. Vanwege de symmetrie is maar één helft van het probleem berekend.

[nl/~veldman/comflow/comflow.html](http://www.math.rug.nl/~veldman/comflow/comflow.html). Op deze site is ook te lezen welke studenten en promovendi hebben bijgedragen aan de ontwikkeling van de methode. Wel kan ik alvast een plaatje van een rekenresultaat laten zien waar een golf zojuist een windturbinetoren heeft “belaagd” (zie figuur 4). De golf slaat over, met in het echt een schuimkop tot gevolg. De “schuim-fysica” zit (nog) niet in ons rekenmodel, maar via de postprocessing kunnen we al wel de suggestie wekken...

## Uitdaging

Ik hoop dat ik met dit artikel een indruk gegeven heb hoe (numeriek) wiskundige methoden een bijdrage kunnen leveren aan het begrijpen van de fysische werkelijkheid. Het zal duidelijk zijn dat deze uitdagende samenwerking het uiterste vergt van de mathematische mogelijkheden en daardoor zeer stimulerend werkt op het ontwikkelen van nieuwe (numerieke) wiskunde •

# De FMF van toen

*15, 10 en 5 jaar geleden*

DOOR **NIELS MANESCHIJN**

1999... Het lijkt nog helemaal niet zo lang geleden. Eigenlijk is er in de tussentijd weinig veranderd. Ook toen al maakte men zich druk over de zoveelste ver-her-ver-organisatie van de faculteit, wat men toch met de alumni aanmoest, hoe we de nieuwste nieuwe kamer nu weer moesten noemen en waar we nu weer de bestuurs- en commissie-diehardes vandaan gingen halen. Brede bachelors komen en gaan, samenwerkingsverbanden als Basic komen op en gaan ten onder, informatici gaan en komen weer terug, evenals de deelnemers van Grote Buitenlandse Excursies.

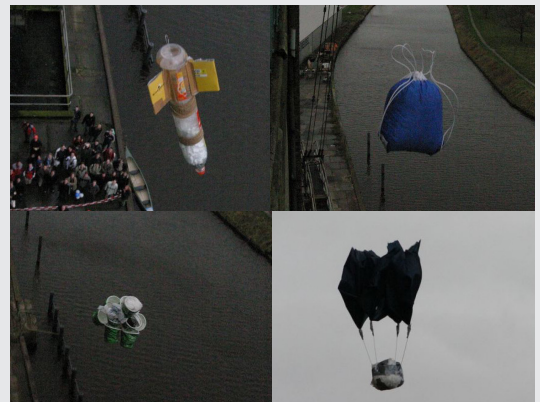
Zelfs het lustrum begint een constante te worden voor de observator met de lange adem. In 1999 traden wij op met ons bestuur tijdens de lustrum-Bonte Avond. Vijf jaar later had ik mijzelf in de lustrumcommissie laten lullen (bedankt nog, jullie weten wie je bent) en organiseerden we een enigszins overmoedig lustrumprogramma bomvol levensgevaarlijke evenementen als 'Schiet je Granny' [1], 'Eisprong' [2] en anderszins onvergetelijke evenementen als de Rixxbios[3], de XZP45 [4] en het godbetere 'Kermis met Neveneffecten' zonder Neveneffecten [5] (contracten lezen is moeilijk). Weer vijf jaar later was ik te gast op het lustrum van 2009. En nu zijn we al

weer toe aan het volgende lustrum!

De herhaling zie je overal, denk bijvoorbeeld aan de digitale wederopstanding van de Fotocie, eerherstel voor de borrel, de heruitvinding van het Ledenweekend en het herstarten van de GBE-cyclus. Om maar niet te spreken over de voortdurende afsplitsing en weer onvermijdelijke fusie van activiteitencommissies als Nebula, Doen, de Sportcie, Donner en de Loopcie. Tentamenbank en excursies samen onder Huygens of toch maar niet? Willen we een alumnivereniging? Zijn de statuten en het HR nog bij de tijd? Wordt het weer eens tijd voor een fotowedstrijd en is de vorige al afge-



**FIGUUR 1** Het bestuur van Niels Maneschijn in 1999.



**FIGUUR 2** Eitjes in verpakkingen tijdens de activiteit 'Eisprong', lustrum 2004.

rond? Kan onze website nog wel?

De leuke veranderingen zitten in de details. Verdwenen zijn de voorgedrukte standaardposters waar met een prittstift en een copier de content op werd gezet. Het forum wordt bevolkt door de oude diehards terwijl de nieuwere lichteningen alles via Facebook schijnen te doen. Het bestuur bestaat ineens uit zes man. De Periodiek staat dusdanig vol leuke inhoud dat er een extra editie in het jaar moet komen. De Almanak krijgt een symbolischer functie omdat je het ding toch niet meer pakt voor de telefoonnummers...

Kortom, de FMF van nu lijkt sprekend op de FMF van toen. En dat is prima. Misschien een leuk thema voor een lustrum... •



**FIGUUR 3** Een fiets na de activiteit 'Pimp my Bike', lustrum 2004.



**FIGUUR 4** Tijdens het openingsfeest, lustrum 2009.

## Referenties

- [1] Scholieren- en studententeams werden uitgenodigd om een appel zo ver mogelijk te schieten met een apparaat van maximaal 45 kilo.
- [2] Wie krijgt het snelst een rauw ei heel naar beneden en in een pan vanaf 30 meter hoogte? Het kon in een seconde of zes.
- [3] De Nixxbios maar dan in de oude RKZ-bios
- [4] Het best bewaakte geheim: de Xcursie Zonder Programma
- [5] Later bekend geworden op TV en uiteraard van Kabouter Wesley. Godmiljaar! Later kwamen ze alsnog langs.
- [6] Oh en we deden ook nog even een Dies, alumniënie, Pimp my Bike, borrel, symposium en het FMF-lied erbij. Wat waren we aan het denken?



**FIGUUR 5** Tijdens de activiteit 'Schiet je Granny', lustrum 2004.

# Petra Rudolf

## *Looking back on the last 10 years*

BY PETRA RUDOLF

When I last wrote for the *Perio\*diek*, I had just started at the University of Groningen a year earlier and tried to give an impression of what it meant to build up a group and start teaching. Now it is my great pleasure to give an overview of what has happened in the 10 years since.

Of course, the group has grown to an important size. I am no longer alone in guiding the research, Meike Stöhr joined as an assistant professor 4 years ago. Currently 12 PhD students are working on different research projects, 5 supervised by Meike Stöhr and 7 by me. Two PhD students are writing their thesis, having finished their research and still need to defend it. Four postdoctoral researchers pursue their own projects and act as daily supervisors of the PhD students and of the bachelor student and the three master students. Our secretary, Yvonne Nagelhout, and our technician, Luc Venema, help us all. In the coming months the group will grow further with two more PhD students, one from Germany and one from Indonesia, and two visiting scientists, one from Mexico and one from Italy. The group is very international, we have members from South Africa, Argentina, Belgium, Pakistan, Greece, Ukraine, Germany, Italy, China and Vietnam. Only five group members are Dutch and in these 10 years only one Dutch PhD student has joined the team – this is actually the only thing I am disappointed about, because I would have wished to attract more Dutch students.

### Looking back

I can say that these 10 years have certainly been productive from the scientific point of view: 131 papers (nearly all in top journals in the field) and 8 book chapters published, 43 invitations to talk at national and international conferences myself and more than 250 conference contributions by group members. A major highlight was certainly my collaboration with synthetic and theoretical chemists on the very ambitious project to overcome a significant hurdle for

molecular nanotechnology, namely the realization of a wholly synthetic molecular system that converts an external energy source (light) into biased Brownian motion to transport a macroscopic cargo and do measurable work. This took 10 years to achieve, since the molecules employed were completely new and had to be characterized with respect to all their physicochemical properties and also protocols for grafting them on surfaces without losing their dynamic properties had to be developed. Our efforts culminated in the publication in *Nature Materials* in 2005 describing the millimeter-scale directional transport of a liquid on a surface covered by a monolayer of the molecular shuttles (stimuli-responsive rotaxanes). The light-induced collective operation of these shuttles is sufficient to power the movement of a microliter droplet of diiodomethane up a twelve-degree incline. This breakthrough was recognized by the European Commission, who awarded us the Descartes Prize for Research 2007. The work on synthetic light-activated molecular switches and motors on surfaces has continued very successfully over the past years mainly with the groups of Professors Ben Feringa and Wesley Browne here in Groningen.

In parallel, the group continued to work on carbon-based materials, graphite, fullerenes, and carbon nanotubes initially and lately more and more graphene. In this field we managed to provide new insight into the role of electron correlation in determining the physical properties. To explain this in simple terms, I like to evoke a person walking on a beach in solitude which resembles the situation of an electron in a solid where electron correlation is not important, and that of a person wanting to cross the dance floor of a

discotheque: a lot of other dancers have to move in a correlated way to let one pass but they can also decide to pick up the person who wants to cross and pass him/her on over their heads. The latter situation has affinities with highly correlated electrons, which can also give rise to new forms of transport (superconductivity). A multitude of persons moving in a correlated way can also create a collective state – think of the Mexican wave in a stadium. Correlated electrons can also establish a new state like a charge density wave or go through a metal/insulator phase transition.



This kind of phenomena is what we studied in these carbon-based materials and I was very honoured when these achievements prompted the American Physical Society to elect me as Fellow in 2010, a recognition that is only granted 0.5% of its members each year. More recently, our team has developed the high-yield controlled deposition of graphene single layers by various methods and is currently working on other two-dimensional solids. We also used graphene and graphene oxide as scaffold for organized nanocomposites for gas storage and gas filtering, medical applications and traps for particular contaminants in drinking water. A recent fundamental breakthrough was that we demonstrated, by applying sonication, that few-layer graphene can be transformed into multi-walled carbon nanotubes – a process which had been hypothesized for many years but never proven experimentally.

To promote the research group's visibility and attract scientists to Groningen, I organized here in Groningen in 2010 the 27th edition of the European Conference on Surface Science, which drew 700 participants. I

shall try to achieve a similar success again in 2016, when I shall organize and chair the 26th Conference of the Condensed Matter Division of the European Physical Society again here in town.

### Teaching

Teaching is equally important as research in the life of a university professor and I have very much enjoyed teaching both at the bachelor and at the master level. First only in English and after 5 years also in Dutch; in fact it takes many more years to master a foreign language at the level where one can

teach in it than to speak it fluently. I have taught Solid State Physics to both physics and chemistry bachelor students, Electronics to engineering bachelor students, and given parts of the TopMaster Nanoscience courses as well as an elective master course, Surfaces and Interfaces. Since the reform of the curriculum in Physics, I teach the introduction lectures in Nanophysics to first year students and of all courses I ever taught, this is certainly the one I enjoy most. Sharing things I am passionate about with students who are just discovering them is great fun. I also give lectures on Nanoscience to Honours students which are also a great audience to teach. After having taught in Italy and in Belgium, it was a big surprise for me to discover that here in Groningen students are very different from students elsewhere: many do not care so much to excel in their studies, having passed the exam is good enough for them. They are very shy to interact with their lecturers, hardly ever ask questions, and do not like it when one asks questions during the lectures directed to a specific person, instead of posing them to the class as a whole. I do not quite understand the

reasons for this attitude: understanding is the hardest part of any course and so if the lecturer can help by replying to questions, this should be considered as an advantage. There are also much fewer students here than in other countries who come to my office for questions compared to when I worked abroad, where I was used that every lunchtime or afternoon students would come for questions on lectures, exercises or homework. Don't students in the Netherlands want the full value for their inscription fee, which includes one-on-one consultation?

### Graduate School of Science

Since May this year I have exchanged nearly all of my teaching task for a great new challenge, that of directing the Graduate School of Science. This means that I am now responsible for 26 master programs and for the courses for the more than 750 PhD students of our faculty, an exciting task, which is close to my heart. I am convinced that we have great master programmes closely linked to the excellent research done in our faculty and I am working together with the adjunct directors of all these programmes to keep developing the curricula. This includes soft skill training, important for different professional environments, improve publicity/marketing strategies to attract more students and making sure that students finish their studies in time. Any ideas from the student side on how to advance any of these issues are obviously welcome. The student member of the board of the Graduate School, Berna Kel, is in the process of talking to all student associations to collect both criticism and input. The first result of this will be better information on which master research projects are available for every programme. I like challenges of all kinds and I look very much forward to recruiting all experience and creativity available locally to make the programmes of the Graduate School better and more attractive in the coming four years.

### Finished group members

*“Please pick up the challenge:  
convince a girl from your  
former school to study here!”*

Before I conclude this overview, I thought it might be interesting for the readers of *Perio\*diek* to learn what has become of the many group members who moved on after their contract here in the group finished, so here are a few examples. Among the eleven Bachelor students who worked here in the past, two deserve a very special mention, Eric Prinsen because his work found its way into a publication, and René Kist because with his thesis he won the first Prize for poster presentations at the National Science Bachelor Student Conference in 2007. Eric is now Consultant at The Boston Consulting Group and René, after doing a PhD at the Univer-

sity of Cambridge, is now Control Systems Engineer at Cambridge Mechatronics. I had the privilege of supervising 13 master students so far; of these only two decided to go into industry (ASML and Shell) right after getting their degree, one chose to become a high school teacher and the others put off the decision on whether to continue in academia or in industry to go after a PhD. Of the 13 PhD students who defended their dissertation in the group in these 10 years, only one, Tatiana Fernandez Landaluce, opted for a career in industry and is now at IRX Innovations. All the others decided for research centres or universities as their next career move. For example, Yu Wu now works at the Energy Research Centre of the Netherlands, Sandra Mendoza has her own research group at the Facultad Regional Reconquista of the Universidad Tecnológica Nacional in Argentina, Konstantinos Spyrou and Oleksii Ivashenko are postdocs at Cornell and at the University of Alberta, respectively. Régis Gengler did a postdoc in Hamburg and Toronto and is now back here in Groningen as a project leader, who supervises part of my research program since I have become director of the Graduate School. A career in academia has also been the choice of 7 of the 13 postdoctoral researchers who were former group members; one opted for becoming a high school teacher in Bremen. Four former postdocs decided not to return to



their home countries but to remain in the Netherlands to go for an industrial career; examples are Monika Lubomska-Cloin and Fabrizio Evangelista, who became respectively team leader and project leader at ASML.

## Women in Science

Besides the research work in experimental condensed matter physics and physical chemistry, my teaching and managerial work, I have dedicated considerable energy towards promoting Women in Science and Physics to a broader public. Since 2008 I have been the president of the 'Stichting Nationale Natuurkunde Olympiade' and am especially happy (and proud) to report that 36.8% of the 3779 participants of this year's Physics Olympiad were girls, while 10 years ago girls made up only 21.1% of the 1730 participants. I think that gives hope for attracting more girls into science and engineering studies in the future. For this goal, I would like to engage all current beta students here in Groningen: please pick up the challenge, every single one of you, to convince a girl from your former school or in your circle of friends to study here! Of course, you should convince boys too, but I am convinced that the atmosphere in the classrooms and in FMF will be even nicer if we have more female students. For you and for them it will pay, because a recent study on income in the USA showed that the average salary of a man who received a natural science or engineering degree and who then works in the same domain is 21% higher than the average salary of former students of other subjects such as law or business, while for women the advantage is even higher: 29% more average salary.

Concerning the situation of women scientists, the situation here has changed remarkably in the past 10 years: while then I was the only female professor in Physics, now 18% of the RUG Physics professors is female, of the Astronomy professors even 20%; among the UDs and tenure tracker assistant professors in Physics 1/3 is female. This is a wonderful improvement, which I hope will also encourage more students to remain here for their master and PhD to profit

from this particular environment, which is unique in the Netherlands. I have done my best to advance a female friendly environment not only here in Groningen but also nationwide. For example, I convinced the University of Groningen to set up special Childcare Program that targets ad hoc situations (a sick child, travel to conferences, and parental participation in international projects) as well as childcare for conference participants and temporary guest lecturers. This tackles a clear and present 'care gap', which prevents female scholars from maximizing their professional participation, travel, career development, and competitiveness. For this program, I helped to secure financial support from the Elsevier Foundation. I have taken part in the selection committees for Rosalind Franklin Fellows, which are tenure track positions for excellent women; I have organized networking activities for these fellows as well as for the female professors of the university. At the national level, I have chaired the FOM/v committee of the Dutch National Foundation for Fundamental Research on Matter (FOM), a committee that realizes a programme designed to encourage more female physicists to pursue careers in science through fellowships, training activities and by awarding the Minerva Prize. Wherever I give scientific talks, I also offer as double feature a lecture on "How to keep Women (and Men) in Physics" or "Women in Physics from the Middle Ages to the end of the 19th century" to increase awareness. This engagement for Physics and for Women in Science was part of the reason why Her Majesty Queen Beatrix bestowed on me the great honour becoming Officer of the Order of Orange Nassau last year. This was an enormous surprise and a recognition I am at the same time immensely grateful for and very proud of, as you can see in the picture that was taken in the lab on the day I was honoured. I really feel I belong to this country now and will do my very best for this University, for Physics in the Netherlands and abroad, and for Women in Science in the coming 10 years. I still feel it is a privilege to work here •

# Vorig Breinwerk

## *Sudoku verkeerd*

DOOR DE REDACTIE

Vorig breinwerk, de ‘Sudoku verkeerd’ is gewonnen door Cornelia Terpstra. Het was een bijzondere sudoku, je moest namelijk niet de sudoku kloppend invullen, maar de fouten precies een keer terug te laten komen. Dit was een vrij lastige puzzel, en de redactie zelf heeft zich er dan ook vele uren op stuk mogen buiten. Wij zijn dus ook positief verast over het grote aantal goede inzendingen van: Emmy Slager, Cornelia Terpstra, Frank Lefeber, Jari Hoekstra en Susan van der Woude. Uiteindelijk kon er slechts een winnen en onze vijf zijdige dobbelsteen heeft Cornelia Terpstra als winnaar aangewezen. Cornelia Terpstra heeft het boek “Origami basistech-

nieken” gewonnen! De anderen willen we hartelijk bedanken voor hun inzendingen, hopelijk hebben jullie net als ons veel plezier aan de puzzel beleefd.

Voor zij die zich afvragen, wat nu de juiste oplossing is, staat deze hieronder weergegeven. De fouten zijn gemarkeerd in het blauw. Voor iedereen die zich nu afvraagt, hoe je tot deze oplossing zou moeten komen, niet getreurd. We hebben de oplossing van de maker van het vorig breinwerk, Johan Jager, op onze website gezet. Je kan deze vinden op [perio.fmf.nl/2014-5/Breinwerk.doc](http://perio.fmf.nl/2014-5/Breinwerk.doc) •

### De oplossing

Laten we eerst de regels voor de Sudoku verkeerd herhalen:

1. Per rij, kolom en blok is er precies één fout aanwezig.
2. Een fout conflicteert altijd drie keer. (Eén keer in dezelfde rij, één keer in dezelfde kolom en één keer in hetzelfde blok).
3. De getallen waarmee een fout conflicteert, worden zelf als goed gezien.
4. Binnen een blok zal een fout nooit conflicteren met een getal op dezelfde rij of kolom. Zie het voorbeeld hieronder.
5. De cijfers 1 tot en met 9 zijn allemaal precies één keer fout.
6. De cijfers 1 tot en met 9 komen allemaal negen keer voor.
7. De sudoku is niet gebaseerd op een kloppende sudoku. (Probeer fouten niet te vervangen door een ander cijfer.)

Met deze regels kon je tot de volgende oplossing komen; waarin de “fouten” in het blauw zijn aangegeven.

6	4	5	7	9	8	7	2	3
8	3	9	2	6	7	8	4	1
2	8	7	4	3	1	3	6	5
8	5	6	7	2	9	4	1	9
9	2	1	8	4	2	5	3	7
7	6	4	1	5	3	9	8	6
5	6	8	9	1	4	3	1	2
1	9	2	3	4	5	6	7	4
3	7	5	6	8	2	1	5	9

# Nieuw Breinwerk

## *Sudoku verkeerd*

DOOR DE REDACTIE

Voor het nieuwe breinwerk zijn wij bezig geweest met het Lustrum thema ‘Change’. Change vertaald zich, zoals je waarschijnlijk wel weet, niet alleen verandering, maar ook wisselgeld. Daarom hebben wij van de redactie voor deze editie een puzzel gemaakt die jouw gaat leren hoe je met je wisselgeld om kan gaan. Lukt het jou om de juiste en meeste oplossingen te vinden, stuur deze dan voor 25 november naar [perio@fmf.nl](mailto:perio@fmf.nl). Onder de goede inzendingen verloten wij een spaarpot, om jouw eigen *Change* in te stoppen •

*“Er hoeven niet alleen  
maar muntstukken in  
de bekers te zitten.”*

### De opgave

Neem 11 muntstukken en verdeel deze over 3 bekers en wél op zo’n wijze, dat er in elke beker een oneven aantal muntstukken zit. Dat is niet moeilijk, je zou bijvoorbeeld in de eerste beker 1 muntstuk kunnen doen, in de tweede 3 muntstukken en in de laatste beker de overige 7 stukken stoppen. Laten we het daarom iets interessanter maken. Laten we het daarom iets interessanter maken. Laten we veel meer munten en veel meer bekers nemen. Bijvoorbeeld 1024 munten en die verdelen over 109 bekers. Op hoeveel manieren kan je deze 1024 munten verdelen, zodat in elke beker een oneven aantal munten zit? En hoe verdeel je deze munten dan?



**FIGUUR 1** Een stapel wisselgeld om over de bekers te verdelen.

**Schut Geometrische Meettechniek** is een internationale organisatie met vijf vestigingen in Europa en de hoofdvestiging in Groningen. Het bedrijf is ISO 9001 gecertificeerd en gespecialiseerd in de ontwikkeling, productie en verkoop van precisie meetinstrumenten en -systemen.

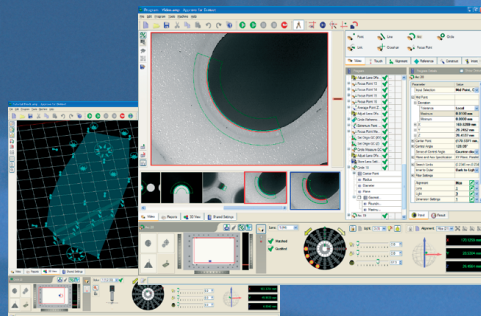
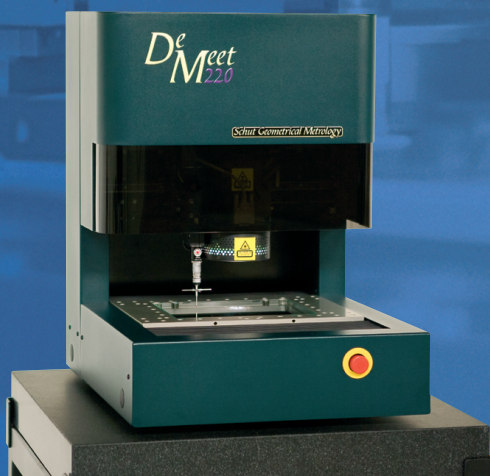
Aangezien we onze activiteiten uitbreiden, zijn we continu op zoek naar enthousiaste medewerkers om ons team te versterken. Als jij wilt werken in een bedrijf dat mensen met ideeën en initiatief waardeert, dan is Schut Geometrische Meettechniek de plaats. De bedrijfsstructuur is overzichtelijk en de sfeer is informeel met een "no nonsense" karakter.

Op onze afdelingen voor de technische verkoop, software support en ontwikkeling van onze 3D meetmachines werken mensen met een academische achtergrond. Hierbij gaat het om functies zoals **Sales Engineer**, **Software Support Engineer**, **Software Developer (C++)**, **Electronics Developer** en **Mechanical Engineer**.

Er zijn bij ons ook mogelijkheden voor een technisch interessant **stage-** of **afstudeerproject**. Dit kan in overleg met de docent worden afgestemd.

Open sollicitaties zijn ook zeer welkom. Voor echt talent is altijd ruimte.

Voor meer informatie kijk op [www.Schut.com](http://www.Schut.com) en [Vacatures.Schut.com](http://Vacatures.Schut.com), of stuur een e-mail naar [Sollicitatie@Schut.com](mailto:Sollicitatie@Schut.com).



**APPROVE**  
for De Meet

