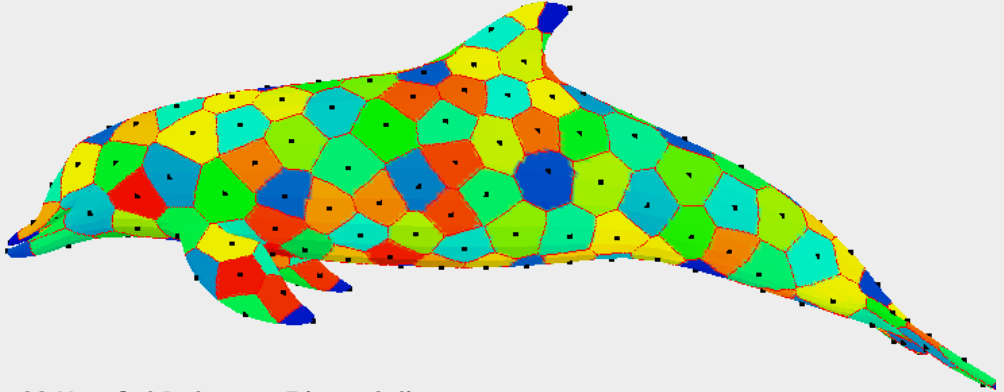


# perio\*diek

op regelmatige tijden terugkerend jaargang 2014 nummer 4



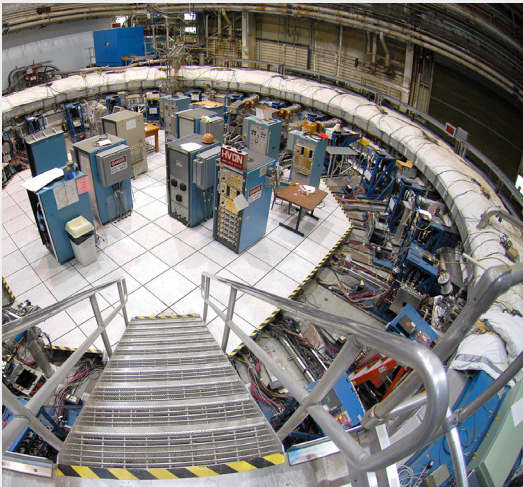
# Inhoud



## 30 Non-flat Delauney Triangulations

Heb jij altijd al willen weten hoe je het beste een oppervlak kan verdelen zodanig dat een computer ermee kan werken?

Blader dan snel door naar pagina 30 voor een antwoord op je vraag en nog veel meer informatie!



## 7 The muon

Lees meer over hoe nieuwe bevindingen met betrekking tot muonen het standaard model drastisch kunnen veranderen!

## In deze Periodiek

- 4 In het nieuws
- 7 The muon
- 11 Van het kandidaatsbestuur
- 14 Radio detection of Cosmic rays
- 17 Van de lustrumcommissie
- 18 Voorspellen van het WK-voetbal
- 22 Breinwerk
- 24 Quantum Chromodynamics
- 30 Non-flat Delauney Triangulations
- 38 Koken: Limburgse vlaai



## 18 Voorspellen van het WK-voetbal

Zou jij de WK uitslagen wel eens beter willen voorspellen dan de ‘echte kenners’? Neem een kijkje in de keuken van een statistische methode om een voorspelling te doen over de uitslagen op het WK.

**Redactie** Derk Rouwhorst, Steven van der Veeke, Douwe Visser, Bart Marinissen, Maïke Jaspers, Klaas Hakvoort, Walewein Noordam.

**Scribenten** Rob Timmermans, Mathijs Berghuis, Olaf Scholten, Ellen Oosting, Dennis Steenhuis, Johan Jaeger, Karin Dirksen, Ramsay Dyer.

**Adverteerders** Philips (p. 6), Thales (p. 12 - 13), ASML (p. 29).

Ook adverteren? Neem contact op via [bestuur@fmf.nl](mailto:bestuur@fmf.nl).

**Oplage** 1100 stuks

**Druk** Gildeprint

**ISSN** 1875-4546

**De Periodiek** is een uitgave van de Fysisch-Mathematische Faculteitsvereniging en verschijnt vijf keer per jaar. Eerder uitgebrachte Periodieken zijn na te lezen op [perio.fmf.nl](http://perio.fmf.nl). De redactie is te bereiken via [perio@fmf.nl](mailto:perio@fmf.nl).

## Van de redactie

**W**e beginnen vandaag opnieuw” hoorde ik ooit iemand zeggen. Wat een waardeloze uitspraak dacht ik toen. Hoe kan je vandaag helemaal opnieuw beginnen, we nemen onze ervaringen van gisteren toch mee? Dat was ook direct waar mijn denkfout zat. Waarom zouden we het vandaag niet nog eens kunnen proberen? De meeste grote wetenschappers hadden ook niet altijd het antwoord op de eerste dag klaar liggen. Maar wat hen tot grote wetenschappers heeft gemaakt is dat ze wel tot het ‘juiste’ antwoord zijn gekomen.

Daarom wil ik zeggen: “we beginnen vandaag opnieuw”. Misschien dacht je dit ook wel bij jezelf toen je dit jaar weer voor het eerst college volgde. Probeer dit gevoel ook vast te houden, want nu wil het misschien nog wel om weer opnieuw te beginnen. Maar als je straks een aantal maanden verder bent en je bent op een dood spoor gekomen, durf dan ook te zeggen: “we beginnen vandaag opnieuw”. Zelfs als je op zondagmiddag wakker wordt en weer aan het breinwerk begint hoor ik je al zeggen: “ik begin vandaag opnieuw” •

— Douwe Visser

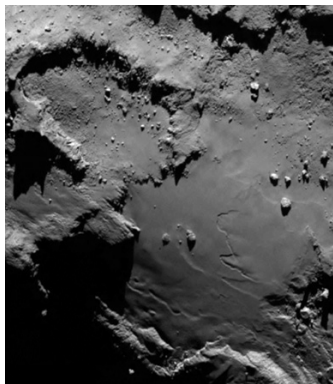
# In het nieuws

## Ruimtesonde Rosetta komt na tien jaar aan bij verre komeet

Het allereerste langdurige rendez-vous van een ruimtesonde met een komeet in de geschiedenis is een feit: Rosetta is aangekomen bij komeet 67P/Churyumov-Gerasimenko. Na een reis van tien jaar, vijf rondjes om de zon en ruim zes miljard kilometer kan het unieke onderzoek aan een van de meest primitieve hemellichamen gaan beginnen.

De spanning was groot op de ochtend van woensdag 6 augustus 2014 voor onderzoekers van de Europese Ruimtevaart organisatie (ESA). Maar om 11.30 uur konden ze opgelucht ademhalen. Ze kregen toen het signaal van ruimtesonde Rosetta, op 405 miljoen kilometer afstand van de aarde, dat de start van haar baan om de komeet 67P/Churyumov-Gerasimenko (67P/C-G) bevestigt. Sinds Rosetta is ontwaakt uit haar "winterslaap" in januari was ze nog tien orbit correction manoeuvres (OCM) verwijderd van de baan. Na de lange reis is de laatste thruster burn om elf uur verricht en heeft Rosetta het laatste zetje gekregen om in de baan terecht te komen: de aankomst is nu een feit en het onderzoek kan beginnen. Rosetta zal in november haar robotlander Philae op de komeet laten landen. De komende weken zal ze zich vooral richten op het in kaart brengen van het oppervlak van de komeet, zodat een geschikte landingsplaats kan worden gevonden voor Philae. Na

de landing van Philae zal Rosetta nog ruim een jaar bij de komeet blijven terwijl deze de zon nadert. Metingen tijdens deze reis worden uitgevoerd door Rosetta en Philae apart, maar samen zullen ze ook de kern van de komeet onderzoeken. Omdat Rosetta rond de komeet blijft zweven, kunnen zij en Philae zich aan weerszijden van de komeet opstellen. Door bepaalde straling naar elkaar te sturen en te registreren hoe deze onderweg door de kern verandert, kunnen onderzoekers veel leren over de kern.



Kennislink

## Mysterie van Siberische gaten mogelijk opgelost

De afgelopen maanden zijn er diverse kraters ontstaan in Siberië. Wetenschappers hebben mogelijk een verklaring gevonden hoe deze kraters zijn gevormd. De vinger wijst in de richting van klimaatverandering.

Op 19 juli voerden onderzoekers, onder leiding van Andrei Plekhanov van het Scientific Centre for

Artic Studies, een onderzoek uit bij de Yamal-krater die eerder die maand is ontstaan. Zij troffen opvallend veel methaan aan. Nabij de bodem van de krater bestond de lucht voor 9,6% uit methaan en dat terwijl de lucht gemiddeld voor 0,000179% uit methaan bestaat.

Plekhanov en zijn team denken dat er sprake is van een connectie tussen het ontstaan van de krater en de opvallend hete zomers in de omgeving van de krater in 2012 en 2013. De gemiddelde temperatuur was vijf graden Celsius hoger dan normaal. De wetenschappers suggereren dat de bevroren permafrost is ontdooid en in elkaar is gestort. Hierbij kwamen grote hoeveelheden methaan vrij. Andere wetenschappers denken dat er sprake is van een langduriger effect. Zij wijzen er op dat de permafrost, op een diepte van twintig meter, de afgelopen twintig jaar met twee graden Celsius is opgewarmd.

De wetenschappers gaan graag terug naar de krater om meer onderzoek te doen. Ze willen graag de hoeveelheid methaan in de wanden van de krater meten, maar het is zeer gevaarlijk werk. De krater is minstens zeventig meter diep. Daarnaast brokkelen de randen dagelijks verder af door opwarming.

Hoewel de krater in onbewoond gebied is gevonden, maken de onderzoekers zich zorgen. Wat als er meer kraters ontstaan in bewoonde gebieden of in gasvelden? Gaan dit soort gaten mensenlevens op-eisen?



Scientias

## Wetenschappers maken volledig lichaam muis doorzichtig

Wetenschappers zijn erin geslaagd het volledige lichaam van overleden muizen doorzichtig te maken. Deze techniek maakt het mogelijk allerlei verbindingen tussen cellen en weefsels in detail te bestuderen. Al ruim honderd jaar wordt gewerkt aan manieren om lichaamsdelen doorzichtig te maken. Het was al mogelijk om organen door middel van een specifieke behandeling transparant te maken, maar daarvoor moesten ze eerst uit het lichaam gehaald worden.

De nieuwe techniek maakt gebruik van hydrogels om vetten uit organen te verwijderen zonder het weefsel verder te beschadigen. Die vetten maken weefsels ondoorzichtig. Dienden de onderzoekers deze toe aan intacte, overleden muizen, dan werden de meeste organen binnen enkele dagen transparant. Twee weken later konden ze ook door de hersenen heen kijken.

De techniek maakt het mogelijk veel gedetailleerdere driedimensionale modellen van (met elkaar communicerende) organen te maken. Zo kunnen gezonde en onge-

zonde organen beter bestudeerd worden.



nu

## Zelforganiserende anti-kankermoleculen in de maak

Moleculen zo ontwerpen dat ze uit zichzelf grotere moleculen vormen die giftig zijn voor kankercellen. Dat is het recente werk van chemici van de Universiteit van Warwick.

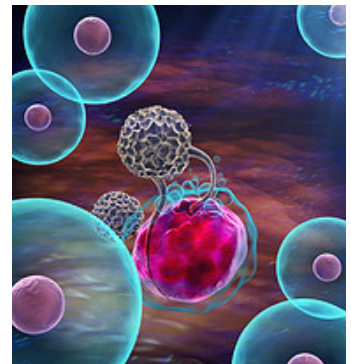
De structuur van de moleculen is vergelijkbaar met die van peptiden die in ons lichaam kanker en infecties bestrijden, zoals het bekende eiwit p53 dat onbeperkte celdeling voorkomt. Uit de eerste laboratoriumresultaten blijkt dat de kunstmatige peptiden menselijke kankercellen van de dikke darm konden uitschakelen.

Peptiden, moleculen bestaande uit een klein aantal aminozuren, zijn in opkomst als medicijn tegen kanker en infecties. Het maken van peptiden bleek niet altijd even makkelijk, maar het zijn vooral de kosten die de ontwikkeling van grote hoeveelheden remmen. Traditionele peptiden zijn al in-

gezet als medicijn, maar ook dat ging niet zonder problemen. De biochemische verdedigingslinie van het lichaam neutraliseert de peptiden vaak al voor ze hun werk kunnen doen.

Het Britse team komt nu met een simpele, praktische manier om kunstmatig peptiden te maken. Hun methode berust op chemische zelfassemblage. Om dat voor elkaar te krijgen worden de losse moleculen op de computer op een bepaalde manier ontworpen. Hierdoor liggen de instructies voor de assemblage tot peptide gecodeerd in de ontworpen moleculen.

Tot zover testte het team hun peptiden in het laboratorium met succes op dikke darmkankercellen, waarvan de celcyclus verstoord raakte. Voor menselijke borstkankercellen bleken de peptiden wat minder giftig te zijn; ze werken blijkbaar erg selectief. In verder onderzoek gaat het team de peptiden en hun anti-kankerwerking verder onder de loep nemen. Dat blijft voorlopig gebonden aan het lab; klinische studies zijn nog niet in zicht.



Kennislink



**PHILIPS**

# The muon

## *Divine laughter*

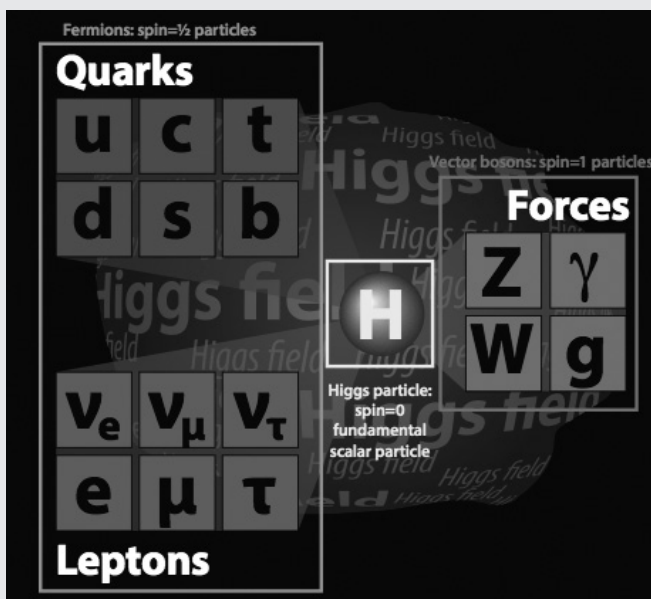
BY ROB TIMMERMANS

With the July 2012 announcement at CERN of the discovery of the Higgs boson, an elementary particle 134 times heavier than the proton, the last missing piece of the Standard Model (SM) of particle physics has finally been found. The SM describes electromagnetism and the strong and weak nuclear forces, and thus accounts for everything except gravity. At the same time, not a shred of evidence for “new physics” not covered by the SM has turned up at the Large Hadron Collider.

The success of the SM is somewhat of a mystery, since it has quite some unsatisfactory features. For starters, the SM contains no less than 19 arbitrary parameters (not counting neutrino masses, or it could even be 28), mostly related to the weak nuclear force.

Its most mysterious aspect is that the fermions, i.e., the quarks and the leptons, come in three “families”, see figure 1. Because ordinary matter consists only of up and down quarks and electrons, it is an enigma why the 2nd and 3rd family exist: they appear to be little more

*“The Large Hadron Collider may finally shed light on why the three families exist.”*



**FIGURE 1** The particles of the Standard Model: the three families of quarks and leptons, the bosons mediating the strong, weak, and electromagnetic forces, and in the center the newly discovered Higgs boson.

than heavy “copycats” of the first family. It all started with the discovery of the muon and things escalated over the years when more fermions were produced in experiments. Thus, our text for today is the famous question reportedly asked by the great experimental physicist Rabi when the muon was discovered: “*Who ordered that?*” [1]

### The discovery of the muon

The muon was found in 1936 in cloud-chamber experiments for cosmic rays. At that time, the known particles were the

photon, the electron, the proton, and the neutron [2]. The rôle of the electron in atomic physics and the rôle of the neutron in nuclear physics and beta decay was recognized, but here was a totally unexpected new particle with a mass of about 200 electron masses. In the beginning, it was speculated that the muon might be the “meson” proposed by Yukawa in 1935, as the boson that mediates the strong nuclear force. The confusion lasted until 1947, when it became clear that in cosmic rays two different “mesons” are created. The first particle is the pion, Yukawa’s boson with a mass of

273 electron masses. The pion decays with a lifetime of about 26 nano-

*“Who ordered that?”*



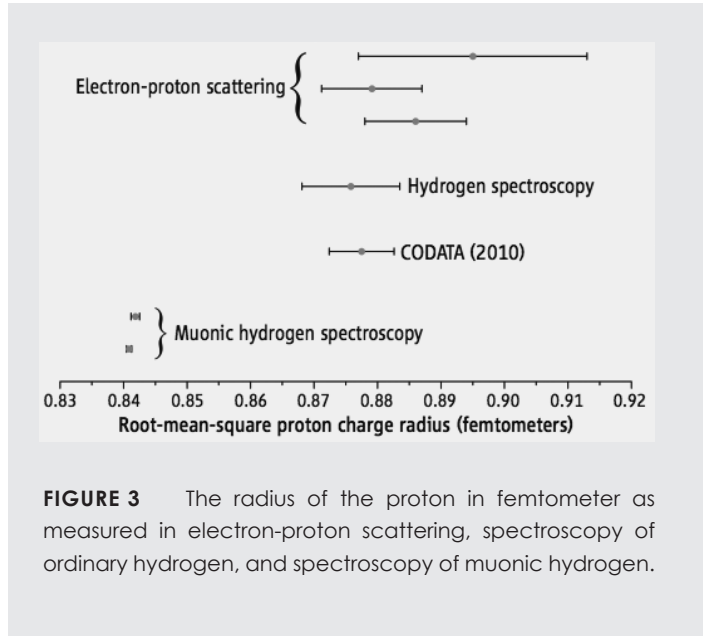
**FIGURE 2** Brookhaven National Laboratory. The storage ring used for the measurements of the g-factor of the muon.



seconds into the second particle, the muon. The muon is a fermion with a mass of about 207 electron masses and it subsequently decays into an electron with a lifetime of about 2.2 microseconds. It slowly dawned that the muon and the antimuon are “just” heavy versions of respectively the electron and positron, with identical electromagnetic properties and interactions, differing only in mass.

## Anomalies

It is intriguing that the very few persistent deviations from the predictions of the SM appear to occur in experiments with muons that benefit specifically from its large mass! The first such discrepancy was found in the measurement of the “anomalous” magnetic moment of the muon at Brookhaven National Laboratory in the United States, see figure 2 [3]. Like the electron, the muon is a little magnet and its spin precesses in a magnetic field. The strength of the magnet is given by the so-called  $g$ -factor, which according to the famous Dirac equation, that combines special relativity with quantum mechanics, should equal 2. In the full theory of Quantum Electrodynamics [4] interactions of the muon with particles popping out of the vacuum slightly modify this  $g$ -factor. Because of the large mass of the muon, its  $g$ -factor is about 40.000 times (the square of the mass ratio) more sensitive to new physics than the  $g$ -factor of the electron. The Brookhaven National Laboratory measurements in fact disagree significantly (3.6 standard deviations) with the SM prediction for the  $g$ -factor. This could be due to vacuum fluctuations that involve new, very heavy particles. Such particles, however, did not so far



**FIGURE 3** The radius of the proton in femtometer as measured in electron-proton scattering, spectroscopy of ordinary hydrogen, and spectroscopy of muonic hydrogen.

show up at the Large Hadron Collider. The experiments on the muon  $g$ -factor will be further improved in the coming years at Fermilab in Chicago, in order to establish beyond doubt whether the present deviation from the SM is a real discovery of new physics.

*“The Higgs boson  
knows something that  
we do not know.”*

A few years ago, another anomaly showed up in measurements on “muonic hydrogen”, an atom consisting of a proton and a muon, at the accelerator institute Paul Scherrer Institute in Switzerland

[5]. Muonic hydrogen is created by stopping a beam of negative muons in matter. Because the muon is 207 times heavier than the electron, the Bohr radius of muonic hydrogen is 207 times smaller than the 0.053 nanometer of ordinary hydrogen. The muon is thus much closer to the proton and the spectrum of muonic hydrogen is much more sensitive to the size of the proton. At the Paul Scherrer Institute, the pro-

ton radius could be very accurately determined from measurements of the X-rays of the  $2P \rightarrow 1S$  transitions in muonic hydrogen. Very surprisingly, this value for the proton radius differs by seven standard deviations from the accepted value determined from electron-proton scattering and spectroscopy of ordinary hydrogen, see figure 3. At the moment, this presents a real puzzle, which has led to speculations that the interactions of the muon with the proton are slightly different from those of the electron with the proton after all.

Finally, we have recently studied the Lorentz invariance of the weak interaction in muon decay [6]. The special theory of relativity is tantamount to the laws of physics being invariant under Lorentz transformations, i.e., rotations and boosts. Searches for Lorentz violation are motivated by attempts to unify in one framework the SM (a quantum theory) with the (classical) general theory of relativity for gravity. We compared the measured lifetimes of the muons at rest with those at a speed of 0.9994 times the speed of light. According to special relativity the muons in flight should live 29.3 times as long as those at rest. The measurements disagree with this prediction by about four standard deviations. Reanalyses of the measured data or better, dedicated new experiments are called for to settle this matter.

## The Higgs boson

In contrast to the muon, the Higgs boson was very much “ordered”. Its existence is needed for the mathematical consistency of the SM. It is perhaps not always appreciated just how central the Higgs boson is to the SM. The SM is a quantum field theory in which particles are described as quanta, localized packets of energy and momenta of a field. The Higgs field, however, differs from the other SM fields, because it develops via spontaneous symmetry breaking (the “famous” Brout-Englert-Higgs mechanism) a non-vanishing condensate throughout space. Through their interactions with the Higgs condensate all particles, both fermions and bosons, acquire inertia, or mass (the coupling of the Higgs boson to a particle is in fact proportional to

its mass). The breaking of mirror symmetry (“parity”) in the weak interaction follows essentially from that. Moreover, since the breaking of a symmetry relating particles and their antiparticles (“CP invariance”) in the SM requires three quark families with different masses, the Higgs system is also responsible for that. Hence, most interestingly, the Higgs boson “knows something that we do not know” [7]: the difference between the fermion families! It may well be therefore that the detailed study of the Higgs boson at the Large Hadron Collider will finally shed light on why the three families exist.

Let us return at the end to Rabi’s question: at present, we still have no clue what the muon is good for, much less why there exist three families of fermions [8]. But unlike a left-over drink on a waiter’s tray in a bar, the muon cannot be sent back, it is here to stay. Possibly, the existence of the muon “may have caused laughter in the heavens, but man was, and still is, ignorant of the joke...” [9] •

## References

- [1] The date of Rabi’s famous quote appears unknown, and the story may even be apocryphal, but it is said to be “in character”; see arXiv:1307.5787[hep-ex].
- [2] The existence of the neutrino had been predicted by Pauli to account for beta decay, but it would be detected only in 1956 at a nuclear power plant. An earlier approved proposal to ignite an atomic bomb and place a detector nearby was called off.
- [3] G. W. Bennett et al. (Muon g-2 Collaboration), *Phys. Rev. D* 73, 072003 (2006).
- [4] R. P. Feynman, QED, the strange theory of light and matter (Princeton University Press, 2006); see his 1979 Sir Douglas Robb lectures on YouTube.
- [5] R. Pohl et al., *Nature* 466, 213 (2010); A. Antognini et al., *Science* 339, 417 (2013).
- [6] J. P. Noordmans, C. J. G. Onderwater, H. W. Wilschut, and R. G. E. Timmermans, Question of Lorentz invariance in muon decay, preprint.
- [7] M. J. G. Veltman, Reflections on the Higgs system (CERN Yellow Report, 1997).
- [8] M. J. G. Veltman, Facts and mysteries in elementary particle physics (World Scientific, 2003).
- [9] A. Pais, Inward bound: Of matter and forces in the physical world (Oxford University Press, 1988).

# Van het kandidaatsbestuur

## *Eerste ontmoeting met het kandidaatsbestuur*

DOOR MATTHIJS BERGHUIS

Hun namen kende ik allemaal wel, maar met geen van mijn toekomstige medebestuurders had ik ooit gesproken. Onze eerste samenkomst was daarom voor mij best spannend. Zou ik wel overweg kunnen met de mensen met wie ik straks een jaar lang intensief moet samenwerken?

**D**e afspraak voor het bakje koffie met croissantje stond gepland voor tien uur. Toen ik iets voor elfen aankwam, waren de meesten er al, klaar om aan de voorstelronde te beginnen. Ik ging naast Johan Jager zitten, die direct opviel door zijn kledingstijl: strak in het pak inclusief monocle en wandelstok, als een baron uit vervlogen tijden. Hij is creatief, gaat zijn eigen weg en heeft voor de FMF afgelopen jaar het symposium georganiseerd. Daarnaast zat Martijn Oudshoorn, fervent fotograaf voor de Fotocie en een goede verhalenverteller, zo bleek al tijdens de eerste ontmoeting. Ronnie Tamming zat tegenover mij, hij leek mij het meest thuis binnen de FMF. Hij wist goed wat er speelde en zat vol ideeën over wat er zou moeten gebeuren. Naast hem zat Walewein Noordam, een

zeer relaxte gast, altijd in voor een praatje. Dat bier drinken ligt hem niet zo, komt liever langs voor een glas (of fles) rode wijn. Daar zaten we, bijna compleet, de enige die nog schitterde in afwezigheid was onze aanstaande voorzitter, Symen Theo Jousma, die de dag ervoor met volle overtuiging de WK-overwinning van Nederland op Mexico had gevierd. Feestvieren kan hij dus, maar hij lijkt mij ook de ideale voorzitter, die precies weet wat er moet gebeuren en de rest kan aansturen om dit voor elkaar te krijgen.

Toen wij onze koffie al lang op hadden, arriveerde hij ook, de club was compleet en de fles whisky kon worden geopend. Ik kijk erg uit naar het komende studiejaar! •



**FIGUUR 1** De zes kandidaten op een rij, met hun functie, vlnr: Ronnie Tamming (extern), Johan Jager (penningmeester), Martijn Oudshoorn (vice-voorzitter & onderwijs), Symen Theo Jousma (voorzitter), Matthijs Berghuis (secretaris) en Walewein Noordam (intern).



## Edwin de Jong

Masterstudent Applied Physics, 24 jaar

Ik was vijf jaar geleden met mijn studievereniging T.F.V. 'Professor Francken' uit Groningen op excursie in Hengelo. We kwamen bij het bedrijf Thales terecht en ik was onder de indruk van de technologische snufjes op het gebied van safety en security. Thales bleek een veel groter bedrijf dan gedacht met wereldwijd meer dan 68.000 medewerkers. Ook in Nederland bleek Thales meerdere vestigingen te hebben.

De opdracht die ik voor mijn stage zocht, lag voor mij klaar in Delft. Daar onderzocht ik met een wiskundige theorie de hoeveelheid informatie die in een radarecho zit en hoe dit verandert als het doel verder weg is, met als doel dat radars op schepen nog preciezer doelen op zee aan kunnen geven waar dat mogelijk is. Dat klinkt heel theoretisch, maar ik leerde om de theorie direct met praktijk te combineren met een techniek ontwikkeld door een Thales-afstudeerder in 2011. Omdat ik aangegeven had na mijn stage te gaan promoveren werd mij de kans

geboden om tijdens de stage al papers te schrijven, samen met mijn begeleider. Deze papers zijn opgestuurd naar radarconferenties in Lille en A Coruña in Spanje. Als het daar goed ontvangen wordt dan zou ik daar via Thales zelfs heen kunnen en een presentatie mogen geven. De ontwikkelde theorie zal de komende jaren verder ontwikkeld worden door mijn begeleider en nieuwe afstudeerders en stagiairs, met als doel dat het uiteindelijk geïmplementeerd wordt in radarsystemen.

Dat ik als student zo serieus genomen zou worden had ik niet verwacht. Afgelopen februari ben ik afgestudeerd. De komende vier jaar ga ik promoveren in Groningen, maar als ik dat heb afgerond, zal ik zeker Thales in gedachten houden.

“Mijn stage wordt binnenkort op een wereldwijde radarconferentie gepresenteerd. Dat je als student zo serieus wordt genomen had ik niet verwacht.”

**Op zoek naar een stage, af  
Start jouw carrière bij Thales. K**

Tijdens de waterpolo vertelde ik mijn teamgenoten dat ik opzoek was naar een afstudeerplek voor mijn studie Technische Informatica aan de Hogeschool Avans in Breda. Mijn teamgenoten adviseerden mij eens bij Thales te gaan kijken. Ik heb op de site gekeken en vond de combinatie van groot, hightech en internationaal erg gaaf en besloot daarom te solliciteren voor een afstudeerplek. Ik kwam terecht aan de andere kant van Nederland, in Hengelo, waar veelal producten voor Marines worden gemaakt. Meer dan 85% van deze producten wordt geëxporteerd naar het buitenland, dat had ik niet verwacht in Hengelo te vinden. De gemiddelde leeftijd ligt hier wel vrij hoog, maar ik merk dat het gewaardeerd wordt als er jonge mensen binnen komen met frisse ideeën. Het wordt gestimuleerd om je mond open te trekken en kritisch te zijn, dat vind ik mooi!

In het onderzoek houd ik mij bezig met het opzetten van een sterke WiFi verbinding op zee. Als schepen onderling contact willen leggen via radio of satelliet is dat erg kostbaar, daarom is het van belang om alternatieven te onderzoeken. Het eindproduct dat wij voor ogen hebben zal bestaan uit een demonstratie van twee apparaten die over een afstand van minstens tien kilometer een WiFi verbinding kunnen opzetten en met een hoge bandbreedte data over en weer kunnen sturen. Ik onderzoek, bouw en test het project. Het project is in eerste

instantie voor op zee bedacht, maar ook de kustwacht heeft inmiddels interesse getoond.

In juni hoop ik te kunnen afstuderen. Er is mij inmiddels een baan aangeboden als netwerk engineer bij Thales. Ook in mijn eerste baan als netwerk engineer zal ik betrokken blijven bij het project van de WiFi verbinding op zee. Ik hoop dat het over een paar jaar in werking is. Het lijkt me dan erg gaaf om later te kunnen zeggen dat ik aan de wieg van dit project stond.

**“Een WiFi verbinding opzetten die mijlen over zee reikt. Het lijkt me gaaf om later te kunnen zeggen dat ik aan de wieg van dit project stond.”**

## Remco Ijpelaar

Student Technische Informatica, 22 jaar



**studeerplek of eerste baan?**  
**zoek op [www.thalesgroup.com/nl](http://www.thalesgroup.com/nl)**

# Radio detection of Cosmic rays

BY AD VAN DEN BERG, WENDY DOCTERS, STEFANO MESSINA, OLAF SCHOLTEN AND GIA TRINH

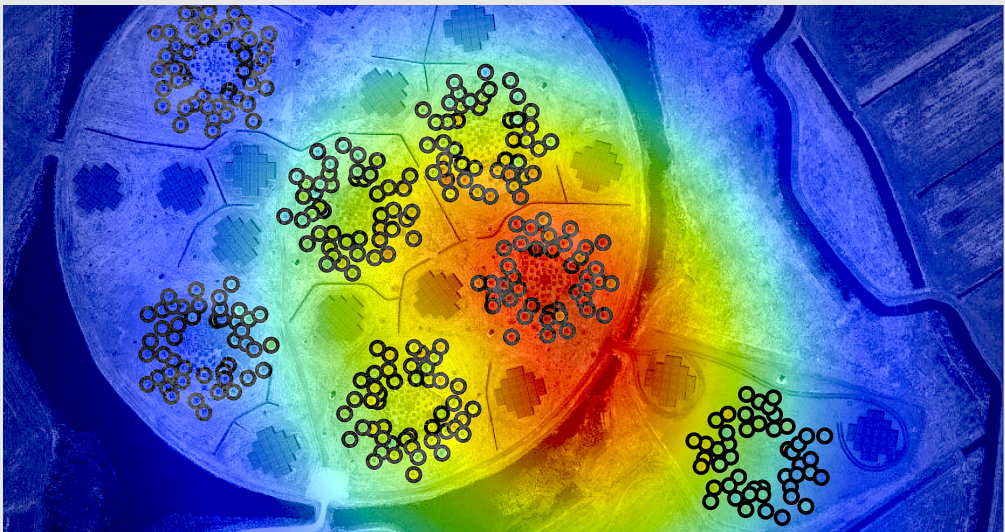
Elementary particles with energies in excess of  $10^{20}$  eV, the energy of a fast tennis ball, 100 km/h, have been observed. Which objects in the cosmos are powerful enough to create such particles? This is one of the questions which is central in cosmic-ray physics.

Even a century after the discovery of cosmic radiation, the sources of the highest-energy particles are still a mystery. Lower energy cosmic particles, with energies of the order of  $10^9$  eV, are known to be accelerated by flares of the sun, mostly through stochastic acceleration by moving magnetic mirrors. These flares are however not powerful enough to create the observed flux of particles with an energy of  $10^{15}$  eV, let alone those of  $10^{20}$  eV.

For any acceleration mechanism of these energetic charged particles, magnetic fields are required over length-scales of their Larmor radius [1]. As the Lar-

mor radius is proportional to the quantity energy divided by the charge ( $Z$ ) of the particle, it will be important to measure both the charge and the energy, to identify the source of the highest-energy particles.

The isotopic composition of cosmic rays is very rich and is energy dependent. The solar wind is dominated by proton ( $Z=1$ ) and Helium ( $Z=2$ ) nuclei, with iron ( $Z=26$ ) as the most abundant heavy isotope [2]. At an energy of about  $10^{17}$  eV, the Larmor radius of a proton in the Galactic magnetic field (with a typical value of 1 nT [3]) is of the size of our Milky Way. At the same time an iron nucleus with the same energy



**FIGURE 1** The large circular structure is the Superterp of Lofar with a diameter of  $\sim 320$  m. The small circles denote the individual antenna positions and the color is an indication of the strength of the signal, where the red depicts the highest signals and the blue the lowest. Overlaid is the result of a simulation. The fact that the colors of the antennas blend with those of the simulation indicates that the data are reproduced well.

has a Larmor radius that is a factor 26 smaller. If the Larmor radius is small compared to the galactic radius, the cosmic rays are ‘captured’ by the galactic magnetic field. Protons with energies in excess of  $10^{17}$  eV cannot be contained in the Galaxy and must therefore be from extragalactic origin. To know the chemical composition of cosmic rays is thus essential for understanding their physics, such as Galactic v.s. extra-Galactic origin [4].

Composition measurements at the energies beyond  $10^{14}$  eV are complicated by the fact that the particle flux is too low for direct measurements with satellites. When a high-energy cosmic ray impinges on the atmosphere of Earth, a particle cascade develops (known as an Extensive Air Shower (EAS)) and the original mass of the cosmic-ray particle has to be unfolded from the properties of this cascade.

Since a heavier cosmic-ray nucleus (say iron) will have a larger diameter and thus a larger cross section for reacting with a nucleus in the air, it will start an EAS much higher in the atmosphere as compared to a cosmic-ray proton. In the ensuing particle cascade the number of particles grows exponentially, until the energy per particle falls below a certain threshold, after which the number of particles decreases. Because the development of a shower after the first interaction is basically a stochastic process, mainly dependent on the energy and not the mass of the initiating cosmic ray, the height at which the particle number reaches a maximum, called  $X_{max}$ , is directly related to the point of first interaction and thus the mass of the original cosmic ray.

The particles in an EAS have in general energies that are orders of magnitude larger than their rest mass and

are thus moving with (almost) the light velocity, the same velocity for all. As a result these particles are concentrated in a thin layer at the front of the EAS, called the pancake.

Molecules in the air are excited through collisions with the particles in the EAS and emit fluorescent light as result. Its intensity is directly related to the number of particles in the EAS. This light is detected by very sensitive cameras, so called fluorescence detectors, and the position where the light intensity is maximal determines  $X_{max}$ . Since the emission is weak, this conventional method can only be used during cloudless and moonless nights, about 10% of the time. As part of an international collaboration, our group in Groningen has developed an alternative detection method, measuring radio-wave emission, which has a duty-cycle of almost 100%.

## Cosmic-Ray Radio Emission

The pancake at the front of an EAS is a plasma with a large amount of electrons and positrons moving towards the surface of the earth with almost the light velocity. When moving through the magnetic field of the earth, electrons and positrons experience a Lorentz force which is transverse to the direction of the EAS. This force induces a drift velocity with opposite

directions for electrons and positrons. As a result, a net electric current develops, which is proportional to the number of charged particles in the shower and oriented in

the direction of the Lorentz force,  $\hat{x} = \vec{v} \times \vec{B}$ , where  $\vec{v}$  is the direction of the original cosmic ray. This varying current is responsible for -so called- geomagnetic radiation, which is polarized along the direction of the emitting current,  $\hat{x}$ .

*“This is a unique method for performing these measurements and opens the possibility to obtain insight into the magnitude and orientation of thunderstorm electric fields.”*

In addition to the transverse electric current there is also a net charge excess in the shower due to the knock-out of electrons from air molecules by elastic positron-electron collisions and Compton scattering. The charge excess is approximately equal to 20% of the number of particles and is thus substantial. The charge-excess radiation is radially polarized and as such distinguishable from geomagnetic radiation.

This simple picture explains the most salient features of radio-emission from EAS and is supported by extensive realistic calculations.

## Radio Detection

The basic antenna for detecting radio waves is a simple straight wire with some electronic frequency filters attached. To map the radio footprint of a cosmic-ray air shower, one needs an array of antennas to obtain an accurate mapping of the signal. There are several such arrays in operation; our group is mainly involved with the AERA array at the Pierre Auger Observatory in Argentina [5] and the LOFAR array [6].

At LOFAR the antennas are clustered in stations of 48 each. The distances between stations vary on a logarithmic scale, where some of the furthest stations lie in England, France, and Sweden; while the core of LOFAR is located near Exloo, some 50 km south of Groningen. The center of the core is the 'Superterp', a slightly elevated round area of 320 m diameter, surrounded by water, containing 6 stations. In the direct vicinity of the Superterp there are a few additional antenna stations.

Figure 1 shows the radio-intensity footprint of an air shower as measured with LOFAR. The result of the simulation shown in the figure is highly sensitive to the height of  $X_{max}$  and this sensitivity can be used to determine for each measured event the value of  $X_{max}$  with a precision of about 20 g/cm<sup>2</sup>.

From the distribution of the  $X_{max}$  values, it is possible to extract the mass composition of the cosmic rays.

Because of the strong decrease of the flux of cosmic rays with increasing energy it is not possible to perform accurate measurements with LOFAR for energies in excess of 10<sup>18</sup> eV; for measurements at higher energies we use the AERA-array at the Pierre Auger Observatory. The energy span available at LOFAR allows us to investigate the interesting energy range of 10<sup>16</sup>-10<sup>18</sup> eV where the transition from galactic to extra-galactic sources is occurring. Data are accumulating and it is still too early to reach a conclusion about their origin.

## Thunderstorm and Atmospheric Electric Fields

The radio footprint of cosmic-rays is determined by the structure of the electric currents that are induced in the air-shower plasma. The geomagnetic and charge-excess currents are affected differently by atmospheric electric fields. In normal, so called 'fair weather' conditions this effect can be ignored while under thunderstorm conditions it is large. Since the radio-emission mechanism is well understood, the footprint, i.e. the intensity as well as the polarization, can be used to map the atmospheric electric field along the trajectory of the cosmic-ray air shower. This is a unique method for performing these measurements and opens the possibility to obtain insight into the magnitude and orientation of thunderstorm electric fields •

## References

- [1] Kael Hanson, Cosmic Rays, <http://homepages.ulb.ac.be/~khanson/particle-astrophysics/w11/PA3.pdf>
- [2] The Solar mass spectrum, [http://umtof.umd.edu/pub/full\\_spectrum.html](http://umtof.umd.edu/pub/full_spectrum.html) and Solar abundances, [http://imagine.gsfc.nasa.gov/docs/science/know\\_l2/cosmic\\_rays.html](http://imagine.gsfc.nasa.gov/docs/science/know_l2/cosmic_rays.html)
- [3] R. Beck, Galactic magnetic field, [http://www.scholarpedia.org/article/Galactic\\_magnetic\\_fields#Magnetic\\_Field\\_Strengths\\_in\\_Galaxies](http://www.scholarpedia.org/article/Galactic_magnetic_fields#Magnetic_Field_Strengths_in_Galaxies)
- [4] P. Blasi, Origin of Galactic Cosmic Rays., Nucl. Phys. B Proc. Suppl. 239 (2013) 140.
- [5] B. Fuchs et al. (Pierre Auger collaboration), The Auger Engineering Radio Array., NIMPA 692 (2012) 93.
- [6] P. Schellart et al. (LOFAR collaboration), Detecting cosmic rays with the LOFAR radio telescope, A&A 560 (2013) A98.



# Van de lustrumcommissie

*Change!*

DOOR ELLEN OOSTING

Tijdens een gezellige kamerborrel vorig collegejaar, heeft de Lustrumcommissie haar thema bekendgemaakt. De zomervakantie is nu helaas voorbij en onze hoofden zijn gevuld zijn met zon, zand en zee. Daarom zullen sommigen van jullie nu niet meer weten hoe het zat met de Lustrumviering. Gelukkig is deze Periodiek er als vanouds om het wennen aan college te versoepelen. Door dit stukje zal je hoofd gevuld worden met de antwoorden op vragen betreffende de Lustrumviering.

**H**et vooruitzicht van een viering in november en december zal je vast nog wel vaag bekend voorkomen. In deze twee maanden zullen wij, samen met de bekende jaarcommissies, enkele geweldige activiteiten voor jullie neerzetten.

De Grote Opening is natuurlijk op 5 november, wat helaas midden in de tentamens valt. Maar weest gerust medestudenten! Wij zullen hier rekening mee houden, opdat er op 5 november toch een gevoel van feest en vreugde rondgaat. Na de tentamens is het tijd om wat te ontspannen, het aangewezen moment om nu echt voor een Grande Opening te gaan! Dit zal een prachtig openingsfeest zijn om de maand november in te luiden. In november zal onze change vooral in het teken staan van verandering en beweging. Na zo'n geweldig feest zal er uitgerust moeten worden onder het genot van eten, drinken en een film tijdens een Nixx bios. Daarna is het tijd voor het grotere werk. Hierover wil ik nog niet teveel vertellen, maar het staat vast dat er wat grenzen overschreden gaan worden. Met nog een borrel en een activiteit van de DOEN, zal de maand november zo voorbij zijn.

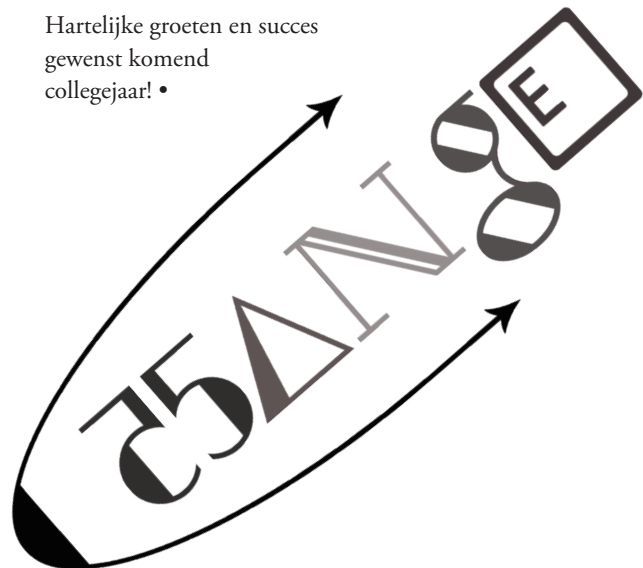
Daarna zal december beginnen, de maand van sinterklaas, kerst en de eindafrekening.

Ik hoor je hopen denken: "Here is your change!" December is de money maand. Hierbij wil ik graag verklappen dat een van onze activiteiten een killing pokeravond is, in samenwerking met de DOEN.

*"Here is your change!"*

Als afsluiter zal er een Groot Eindfeest zijn, zodat we in juli nog weten hoe geweldig december was, enkel en alleen om de lustrum viering!

Hartelijke groeten en succes gewenst komend collegejaar! •



\*Van alle aangekondigde activiteiten in dit artikel vermeld staat nog niet vast of ze daadwerkelijk gehouden zullen worden.

# Voorspellen van het WK-voetbal

*Hoe doe je dat?*

DOOR DENNIS STEENHUIS

Elke vier jaar wordt er weer gespeculeerd, niet alleen door kenners, maar ook fans bemoeien zich met de discussie. Welk land kroont zich tot de nieuwe wereldkampioen voetbal? Welk land scoort de meeste goals? Slechts twee vragen uit een grote verzameling die in de weken voor, maar ook tijdens het wereldkampioenschap voetbal tot grote discussies kunnen leiden. Als natuurwetenschapper en dan met name statisticus kan je in plaats van je gevoel te laten spreken, wat je toch vaak doet als je een uitslag van een voetbalwedstrijd gaat voorspellen, er ook op een totaal andere manier naar kijken. Wat als we nu eens een enorme berg aan voetbaluitslagen gaan bekijken. Aan de hand van deze data maken we een wiskundig model en doen aan de hand van dit model een voorspelling over enkele uitslagen van het WK.

Om te beginnen hebben we natuurlijk heel veel uitslagen van interlands nodig. Gelukkig heeft de FIFA een enorme database met deze uitslagen. Al ruim een half jaar van te voren zijn de 32 deelnemers aan het WK bekend, dus laten we eens beginnen met de laatste honderd gespeelde wedstrijden van elke deelnemer. Dan hebben we totaal 3200 wedstrijden in onze dataset, na het filteren op dubbele wedstrijden houden we er ongeveer 2650 over. Voor elke wedstrijd hebben we de volgende zes datapunten: Team 1, Team 2, Score van Team 1, Score van Team 2, Datum v/d wedstrijd en het type wedstrijd, waarbij er onderscheid wordt gemaakt in zes verschillende types wedstrijden, namelijk: WK-eindronde, WK-kwalificatie, Continentale eindronde, Continentale kwalificatie, Confederations cup en Vriendschappelijk.

Daarnaast maken we nog een aantal aannames. We nemen aan dat elke vriendschappelijke en kwalificatie wedstrijd wordt gespeeld op grond van Team 1. Ook zeggen we dat de wedstrijden op een eindronde of de Confederations Cup op neutraal terrein worden gespeeld, met uitzondering van wedstrijden gespeeld door organiserende landen. Als laatste voegen we de FIFA ranking van de teams toe aan de dataset. Het lijkt namelijk logisch dat een hooggeplaatst land als

Duitsland een veel grotere kans heeft om te winnen tegen een lager geplaatst land als San Marino, dan van een land als Nederland.

## Verskillende Modellen

Nadat we alle wedstrijden op een rijtje hebben staan, is het tijd om het model op te stellen. In principe hebben we twee mogelijke modellen. De eerste mogelijkheid is het zogenaamde Bradley-Terry model. Dit model geeft elk land een waarde tussen de nul en de één, wat te vergelijken is met de 'winkans' of kracht van een team. Het standaard Bradley-Terry model gaat alleen maar uit van winst of verlies, terwijl in het voetbal een gelijkspel ook zeker tot de mogelijkheden behoort. Dan kunnen we gebruik maken van het door Davidson aangepaste Bradley-Terry model. In dit model wordt niet alleen een parameter voor elk land bepaald, maar ook een parameter voor de kans op een gelijkspel. Met dit model kan voor elke combinatie van twee landen de kans op winst, verlies of gelijkspel worden bepaald.

Nu heeft dit model een aantal nadelen, ten eerste hebben we de convergentie voorwaarde voor het algoritme dat de parameters bepaalt. Deze voorwaarde luidt: Elk

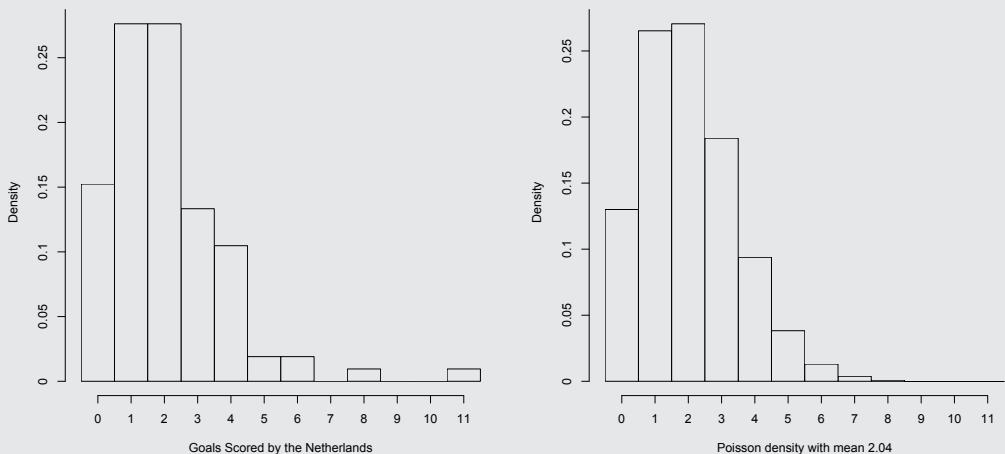
team moet minstens een wedstrijd hebben gewonnen of gelijkgespeeld. In onze dataset hebben we een aantal landen, bijvoorbeeld San Marino of Andorra, die niet aan deze voorwaarde voldoen. Daarnaast kunnen we met dit model alleen de winkansen van de teams uitrekenen, maar in veel WK-poultjes moet de eindstand van een wedstrijd ingevuld worden. Echter met dit model kunnen we daar geen uitspraken over doen.

Laten we dan eens kijken naar de tweede mogelijkheid. Het belangrijkste in het voetbal is het scoren van doelpunten, dus we zouden het aantal doelpunten van een team kunnen modelleren. Het aantal doelpunten in een wedstrijd is discrete data, 2.5 of  $\pi$  aantal doelpunten in een wedstrijd zullen we nooit mee maken. Maar met wat voor discrete distributie kunnen we het aantal doelpunten gescoord per wedstrijd vergelijken?

Om dit te bekijken, hebben we twee histogrammen. In het linker histogram staat het aantal doelpunten gescoord door Nederland. En in het rechter histogram staat de dichtheid van een Poissonverdeling met

gemiddelde 2.04, het gemiddelde aantal doelpunten gescoord door Nederland in onze dataset. Deze twee histogrammen komen redelijk overeen, vooral voor 0, 1, 2 en 4 doelpunten. Dus lijkt het een redelijke aanname om er vanuit te gaan dat het aan doelpunten in een wedstrijd poisson verdeeld is.

Om een poisson distributie te modelleren maken we gebruik van een zogenaamd ‘Generalized Linear Mixed Model’ of GLMM [1], [2]. Hierin zal het aantal doelpunten onze afhankelijke variabelen zijn, dit willen we immers modelleren. Daarnaast hebben we de onafhankelijke variabelen nodig, welke we in de ‘lineaire voorspeller’ plaatsen. Voor dit model gebruiken we de volgende variabelen: gemiddelde gescoorde doelpunten per wedstrijd, gemiddeld aantal wedstrijden per doelpunt tegen, thuisvoordeel, type wedstrijd en verschil in de FIFA-ranking. Naast deze vaststaande variabelen voegen we een random effect toe. Dit doen we, omdat er in veel wedstrijden willekeurige gebeurtenissen optreden. We gaan er echter vanuit dat dit effect voor beide teams even zwaar meetelt. Dit valt



**FIGUUR 1** Twee histogrammen. In het linker histogram staat het aantal doelpunten dat Nederland heeft gescoord per wedstrijd, gedeeld door het aantal wedstrijden dat Nederland heeft gespeeld. In het rechter histogram staat een Poissonverdeling met gemiddelde 2.04.

te vergelijken met wedstrijden waarin het spel heel erg open ligt en beide teams veel scoren, of dat er juist weinig gescoord wordt. Er zijn talloze andere modellen mogelijk waarbij we andere, meer of minder onafhankelijke variabelen toevoegen, maar voor dit model laten we het hier bij.

### Uiteindelijke Model

Met behulp van het computerprogramma R hoeven alleen maar onze data in te vullen en komen we er op uit dat het gemiddelde aantal doelpunten van team  $i$  tegen team  $j$  in een wedstrijd om het wereldkampioenschap gelijk is aan:

$$\mu_{ij} = \exp(0.4188 \times GDS_i - 0.5281 \times GDT_j + 0.3148 \times home_i + 0.004 \times (rank_j - rank_i))$$

1.  $GDS_i$ : Gemiddeld Doelpunten geScored door  $i$ ,
2.  $GDT_j$  : Gemiddeld Doelpunten Tegen van  $j$ ,
3.  $home_i$ : variable welke is 1 wanneer team  $i$  thuis speelt en anders 0,
4.  $rank_i$ : FIFA ranking van  $i$ .

Omdat 48 van de totaal 64 wedstrijden in de groepsfase gespeeld worden, zijn deze op voorhand al bekend en kunnen we deze voorspellen. Een van de eigenschappen van de poisson distributie is dat het naar beneden afgeronde gemiddelde de meest voorkomende waarde is. Dus voor elke wedstrijd in de groepsfase vullen we onze onafhankelijke variabelen in, berekenen het gemiddelde (twee per wedstrijd!) en ronden dit af naar beneden. Op deze manier krijgen we een volgende voorspelling, met bijbehorende kans op deze uitslag. Dit is de meest waarschijnlijke uitslag voor zes wedstrijden uit de groepsfase en de daaraan gekoppelde meest waarschijnlijk stand in de groepsfase.

Dit kunnen we voor elke groep doen en zodoende krijgen we voor elke groep een meest waarschijnlijke stand. Op basis van deze standen kunnen de teams voor de knockout fase worden ingevuld. Vanaf dit

moment stuiten we op een klein probleem, aangezien een gelijkspel niet is toegestaan, moeten we op een of andere manier een winnaar kunnen toewijzen aan elke wedstrijd. Dit doen we door te kijken naar de volgende twee poisson verdeelde random variabelen:  $G_i$  en  $G_j$ , het aantal goals gescoord door  $i$  en door  $j$ . Door de kansen  $\Pr(G_i < G_j)$  en  $\Pr(G_i > G_j)$ , oftewel de kans dat het aantal goals van  $i$  kleiner is dan het aantal goals van  $j$  en het omgekeerde, te bekijken kunnen we bepalen welk team de grootste kans heeft om meer te scoren dan zijn tegenstander. Dit team laten wij doorgaan naar de volgende ronde. Op deze manier krijg je een volledig ingevuld schema met daarbij behorende meest waarschijnlijke winnaar, finalisten, etc. van het wereldkampioenschap.

### Resultaten

Naast het gebruiken van deze kansen om de meest waarschijnlijke winnaar van een wedstrijd aan te wijzen, kunnen we deze kansen ook gebruiken om een schema te maken met daarin voor elk land de kans dat zij een bepaalde ronde in het WK behalen. In tabel 1 staat een dergelijk schema, waarbij in het groen de werkelijke uitslag is aangeduid. Dit model heeft van de 128 individuele scores er 45 (35.2%) goed voorspeld, 29 van de 64 winnaars (45.3%) goed voorspeld en van alle wedstrijden vier (6.25%) helemaal goed voorspeld. Uit deze percentages blijkt maar weer eens dat voetbal een zeer onvoorspelbare sport is, iets wat bijvoorbeeld ook valt te zien aan de enorme scores: Nederland - Spanje, 5-1 en Brazilië - Duitsland, 1-7. Volgens het model waren de kansen dat deze uitslagen hier zouden voorkomen nog geen 0.1%. Dus voetbal voorspellen met behulp van wiskunde is leuk, maar het blijft onvoorspelbaar •

### Referenties

- [1] An Introduction to Generalized Linear Models, Dobson, A.J. and Barnett, A.G., Chapman & Hall/CRC Texts in statistical science series, 2008
- [2] Cursus: Statistical Modelling, Krijnen, W.P. and Abegaz, E., <http://www.rug.nl/ocasys/fwn/vak/show?code=WISM-08&ocasyyear=2013>
- [3] Predicting the World Cup Soccer 2014, D. Steenhuis, 2014

Land	Achste finale	Kwartfinale	Halve finale	Finale	Winnaar
Brazilië	0.8627	0.5923	0.4647	0.3534	0.2423
Spanje	0.7963	0.5146	0.3777	0.2711	0.1695
Duitsland	0.7138	0.5319	0.3693	0.1957	0.1086
Nederland	0.6571	0.3393	0.2141	0.1307	0.0674
Portugal	0.5937	0.3980	0.2459	0.1134	0.0542
Engeland	0.6649	0.4159	0.1810	0.1044	0.0499
Argentinië	0.6538	0.4025	0.2161	0.0942	0.0419
Frankrijk	0.6160	0.3298	0.1594	0.0622	0.0253
Zwitserland	0.6088	0.3203	0.1514	0.0571	0.0224
Rusland	0.6416	0.2790	0.1466	0.0555	0.0215
Ivoorkust	0.5818	0.2960	0.1048	0.0520	0.0210
Uruguay	0.5374	0.2906	0.1019	0.0500	0.0198
Kroatië	0.4750	0.1859	0.0950	0.0468	0.0186
Colombia	0.5393	0.2611	0.0889	0.0420	0.0162
Iran	0.5140	0.2700	0.1205	0.0426	0.0156
Italië	0.4860	0.2474	0.0810	0.0373	0.0139
Mexico	0.4238	0.1539	0.0739	0.0342	0.0126
VS	0.3669	0.1966	0.0943	0.0315	0.0108
Griekenland	0.4699	0.2059	0.0629	0.0270	0.0093
België	0.5387	0.1939	0.0879	0.0273	0.0087
Nigeria	0.4256	0.1993	0.0777	0.0236	0.0075
Ghana	0.3256	0.1632	0.0731	0.0228	0.0072
Chili	0.3397	0.1075	0.0464	0.0191	0.0063
Bosnië-Herzegovina	0.4066	0.1859	0.0699	0.0202	0.0061
Japan	0.4090	0.1618	0.0434	0.0169	0.0051
Algerije	0.4473	0.1388	0.0554	0.0149	0.0042
Ecuador	0.3938	0.1499	0.0507	0.0131	0.0035
Honduras	0.3814	0.1425	0.0472	0.0120	0.0031
Costa Rica	0.3117	0.1213	0.0284	0.0098	0.0027
Zuid-Korea	0.3724	0.0985	0.0345	0.0079	0.0019
Kameroen	0.2384	0.0593	0.0205	0.0068	0.0017
Australië	0.2069	0.0473	0.0155	0.0048	0.0012

**FIGUUR 2** Kansen van het behalen van de volgende ronde.

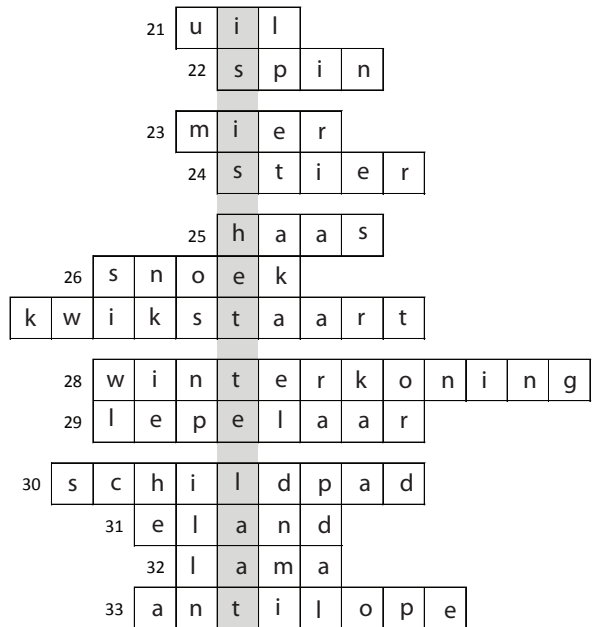
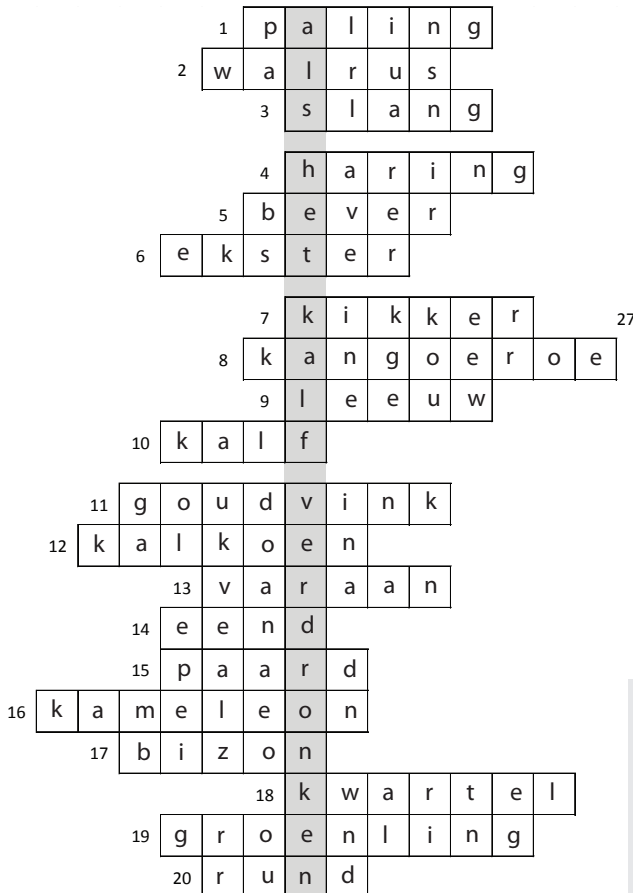
# Vorig Breinwerk

## Dierenrebus

DOOR DE REDACTIE

**V**orig Breinwerk Het breinwerk "Dierenrebus" is gewonnen door Ivar Postma en Kim van Oost. Zij hadden als enige de puzzel foutloos opgelost. Deze gezamenlijke inzending getuigt van de echte kerstgedachte die nodig was om de kerstpuzzel op te lossen. Daarom zijn wij van de redactie erg ver-

eerd om Ivar en Kim de enige echte Periodiek knuffelkoe uit te kunnen reiken. Er is helaas maar één koe, dus jullie zullen hem moeten zien te delen, van harte gefeliciteerd! Voor wie benieuwd is wat zij nu precies fout hadden in de "Dierenrebus", is hieronder de oplossing •



### De oplossing

Dit lijkt tot de oplossing: **“Als het kalf verdonken is, is het te laat.”**

# Nieuw Breinwerk

## *Sudoku verkeerd*

DOOR HELENA EN JOHAN JAGER

Voor het nieuwe breinwerk hebben we Helena en Johan Jager gevraagd of zij een leuke puzzel voor ons konden maken. Volgens ons probeerden ze een echte sudoku te maken, maar het valt nog niet mee om de Japanse kunst van het sudoku maken onder de knie te krijgen. Daarom hebben Helena en Johan de deadline niet kunnen halen. Het resultaat is een Sudoku die “verkeerd” is. Gelukkig werken hun hersenen op een bijzondere manier, waardoor de puzzel nog op te lossen valt met een aantal andere regels. Wij van de redactie moesten vaststellen dat het tegenvalt om Johans denkpatronen te volgen. Lukt het jou wel om de sudoku verkeerd op te lossen, stuur dan je oplossing voor 3 oktober op naar [perio@fmf.nl](mailto:perio@fmf.nl). Onder de goede inzending verloten we een het boek Origami basistechnieken. Lukt het je niet om hem in één keer op te lossen, wees dan niet getreurd, want niemand van de redactie lukte het in één keer. Daarom willen wij van de redactie als tip meegeven: “als het vandaag niet lukt kun je morgen opnieuw beginnen” •

				9	8		2	
			2		7	8	4	1
	8	7	4		1			
8	5			2			1	9
	2	1	8		2	5	3	
7	6			5			8	6
			9		4	3	1	
1	9	2	3		5			
	7		6	8				

Deze sudoku is verkeerd ontworpen en staat vol met fouten! Gelukkig volgen deze fouten een vast patroon:

1. Per rij, kolom en blok is er precies één fout aanwezig.
2. Een fout conflicteert altijd drie keer. (Eén keer in dezelfde rij, één keer in dezelfde kolom en één keer in hetzelfde blok).
3. De getallen waarmee een fout conflicteert, worden zelf als goed gezien.
4. Binnen een blok zal een fout nooit conflicteren met een getal op dezelfde rij of kolom. Zie het voorbeeld hieronder.
5. De cijfers 1 tot en met 9 zijn allemaal precies één keer fout.
6. De cijfers 1 tot en met 9 komen allemaal negen keer voor.
7. De sudoku is niet gebaseerd op een kloppende sudoku. (Probeer fouten niet te vervangen door een ander cijfer.)

Het is aan u de taak om deze sudoku helemaal in te vullen. De fouten moeten niet gecorrigeerd worden (sterker nog, sommigen moet u zelf nog invullen). Er is slechts één unieke oplossing mogelijk.

5		
5		

Dit mag niet (regel 4).

5		
	5	3
	3	

Dit mag niet (regel 1).

5		
	5	

Dit mag wel.

			5
5		5*	
		5	

De 5\* moet wel de fout zijn.

# Quantum Chromodynamics

BY KARIN DIRKSEN

Quantum Chromodynamics (QCD) is the theory of strong interactions between quarks. Maybe you already have heard of this concept and know everything about it, but maybe you have never heard of this before. So let me take you back to the basics and explain what QCD is and what we can learn from it.

The strong interaction, i.e. the mechanism responsible for the strong nuclear force, is what binds quarks together to form hadrons like the pion, proton or neutron. It's also responsible for binding protons and neutrons together to form the nucleus of an atom. In theoretical physics, QCD is a type of quantum field theory that mathematically explains the physics of the strong interactions.

## From Classical Mechanics to Quantum Field Theory

The dynamics of a classical system are dictated by Hamilton's principle (the action principle). This principle states that the equation of motion of a system described by  $N$  generalized coordinates  $q_i$  with  $i = 1, 2, \dots, N$ , between two specified states  $q_1 = q(t_1)$  and  $q_2 = q(t_2)$  at two given times  $t_1$  and  $t_2$ , is a stationary point of the action functional. For the non-relativistic system you have:

$$S[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L[q(t), \dot{q}(t), t] dt$$

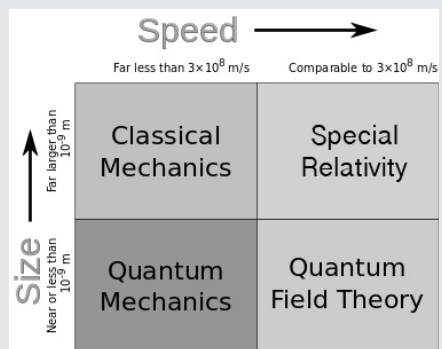
where  $L$  is the Lagrangian, which is the difference between the kinetic and potential energy of the system. The requirement dictated by Hamilton's principle can be met if and only if the Euler-Lagrange equation is satisfied:

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0$$

Replacing the discrete index  $i$  for a continuous variable  $x$  is equivalent to replacing the finite number of generalized coordinates  $q_i(t)$  by a field  $\varphi(x, t)$  function

of both space and time. We have now entered the realm of Classical Field Theory.

A field is a physical quantity with a value for each point in space and time. The field creates a condition in space such that if you place a particle somewhere in space, this particle feels a force. By using fields the analysis of a problem is split in two independent parts. One part tells you that something produces a field, for example an electric charge  $q_1$  creates an electric field  $E$ . The other part says that something is affected by the field, for example the response of an electric charge  $q_2$  on  $E$ .



**FIGURE 1** Summary of domains where different theories are a valid description of the physics. Quantum field theory treats microscopic particles that are moving close to the speed of light and therefore combines aspects of Special Relativity and Quantum Mechanics.



In field theory the action results from the integral over both space and time of the Lagrangian density  $L$ . The relativistic notation of the action  $S$  is then:

$$S[\phi(x)] = \int \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) d^4x$$

At atomic and subatomic scales, it was found that energy and matter show both particle-like and wave-like behaviour, making Newton's law inadequate for describing the system. This is the realm of non-relativistic quantum mechanics where the state of a system is described by a complex wave function. Calculations to compute this wave function allow probabilities concerning the outcome of experiments. One can never make simultaneous and accurate predictions of conjugate variables, such as position and momentum. This is called the uncertainty principle. The uncertainty principle also explains why an atom is so 'big' (diameter of  $10^{-8}$  cm while the nucleus is only  $10^{-13}$  cm): if electrons would be in the nucleus, their position is known. The uncertainty principle then dictates that the momentum of the electrons would be very large, large enough for them to be able to break away from the nucleus.

Particle interactions with particles moving close to the speed of light requires us to incorporate features of Einstein's theory of Special Relativity. The creation and annihilation of particles, combined with quantum mechanics then forces us to abandon the single-particle interpretation of the wave equation. Instead one has to consider quantum fields whose elementary excitations are associated with particle states, see for a review e.g. [1]. Quantum Field Theory (QFT) describes how one or more of these quantum fields, which are functions of the spacetime four-vector  $x^\mu = (x_0, \mathbf{x})$ , propagate and interact. Because the quantum system is obtained as a perturbation of the classical system one can still use the Lagrangian formalism analogous to that of classical field theory to obtain the dynamics of the system. The action is still defined as the integral over the Lagrangian density  $L$  as in formula 3. However, it needs to be quantized to describe a quantum system

## QCD: A non-Abelian gauge field theory

Now we know what a quantum field theory is, let's take a closer look at QCD, a non-Abelian gauge field theory. To understand what this means, I will first explain the difference between invariance of the Lagrangian under global and local transformations.

A global symmetry means that the action is invariant under a transformation that acts the same way on all points in spacetime. When dealing with scattering experiments, this means that applying the transformation to the initial state and then performing the experiment yields

identical results in comparison to first performing the experiment and then applying the transformation to the final state.

When the parameters of a global transformation are made space-time dependent, we speak of a local transformation. In this case, the invariance of the Lagrangian is no longer guaranteed. Restoring invariance requires the introduction of new field(s), which leads to the possibility of new interactions. In his case a gauge field theory is a theory that is invariant under a continuous group of local transformations.

The term 'gauge' refers to redundant degrees of freedom in the Lagrangian. The transformations between possible gauges, the gauge transformations, form a symmetry group of the theory. If this symmetry group is non-commutative, i.e. the generators have a commutator that is nonzero, the gauge theory is referred to as non-Abelian.

Imposing gauge invariance on the Lagrangian of the free fermion field led to the coupling of the free fermion with the gauge field. This gauge field has the properties of a spin-1 particle. The theory looked appropriate to describe electrodynamics. This was later experimentally verified and called Quantum Electrodynamics (QED). This is a gauge field theory where the symmetry group is the Abelian group  $U(1)$  and mathematically describes all phenomena involv-

ing electrically charged particles interacting by means of exchange of photons.

As said before, QCD describes strong interactions and deals with quarks. Quarks carry a different kind of charge, called colour. Hadrons are formed out of quarks in colour-neutral states. The force between two coloured particles is mediated by the exchange of a gluon between the particles. The crucial difference between QED and QCD is that, while the photons carry no charge of their own, the gluons are colour-charged particles. This makes self-interaction of the force carriers (the gauge fields) possible. Because of this difference QCD cannot simply be treated with Abelian gauge symmetries: QCD is a non-Abelian gauge field theory.

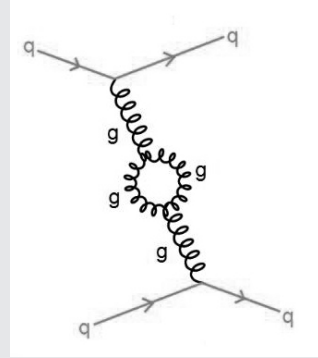
QCD has the symmetry group  $SU(3)$  which is coupled to a number  $N_f$  of matter fields. These matter fields are the quarks, denoted by  $Q_f^i$ , transforming in the fundamental representation of  $SU(3)$ . Each quark field carries a colour index  $i = 1, 2, 3$  and a flavour index  $f = 1, \dots, 6$  equal to the up (u), down (d), strange (s), charm (c), bottom (b), and top (t) quark, respectively. The interaction between the quarks is mediated by the gauge bosons, the gluons  $A_\mu^a$ , with  $a = 1, \dots, 8$ .

The Lagrangian of Quantum Chromodynamics (QCD) then becomes:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} + \sum_f [\bar{Q}_f^i (i\gamma(D_\mu)_{ij} - m_f \delta_{ij}) Q_f^i]$$

## Confinement and asymptotic freedom

Features that govern the behaviour of QCD at the infrared and ultraviolet ends of the energy spectrum can be traced in the beta function  $\beta(g)$ . Due to quantum corrections to the Lagrangian, the coupling of the theoretical  $g$  acquires a so called anomalous dimension. The dependence of a coupling on the energy-scale or renormalization scale  $\mu$  is known as the running of the coupling. This is the fundamental feature of scale-



**FIGURE 2** Feynman diagram of the self-interaction of gluons.

dependence in quantum field theories. The running of the coupling  $g$  of a gauge theory can be studied by looking at its derivative, the beta function:

$$\beta(g) = \mu \frac{dg}{d\mu}$$

When the coupling of a gauge theory is close to zero, only the leading order of the perturbative contributions to the beta function counts in order to determine its sign. For QED this sign is positive, while for QCD it is negative until a certain critical value for the number of flavours ( $N_f = 16,5$ ) is reached. The difference in sign of the beta function explains the different properties of these theories.

A positive sign of the beta function tells us that the coupling increases with increasing energy scale. This implies two things. The first is that QED is an infrared safe theory, which means that it does not depend on the low energy (equal to long distance) physics of the theory. The physics behind this statement is that the influence of the electric charge is partially screened by virtual electron-positron pairs of opposite charge that are present in the vacuum. At larger distances the charge is completely screened and no interactions are possible, thus rendering the theory infrared safe.

The second implication is that QED becomes strongly coupled at high energy. In fact, the coupling becomes infinite at some finite energy, resulting in what is called a Landau pole. Luckily this problem occurs at such high energy scales that the theory can still be valid in real life.

A negative sign of the beta function has the opposite effects. The coupling approaches zero at high energies and that the analogue of the Landau pole now occurs at a small energy scale. At this 'QCD scale' gluons and quarks are strongly coupled and colour is confined. Colour confinement means that you cannot isolate a single quark; quarks always come in colour neutral sets of three quarks (baryons) or quark-antiquark pairs (mesons).

At high energies, the quarks interact weakly allowing perturbative calculations. This property is called asymptotic freedom. Both Gross and Wilczek [2] and Politzer [3] found that gluons have an anti-screening effect and that QCD is asymptotically free, because this anti-screening of the gluons overcomes the screening due to the quarks.

### Chiral symmetry

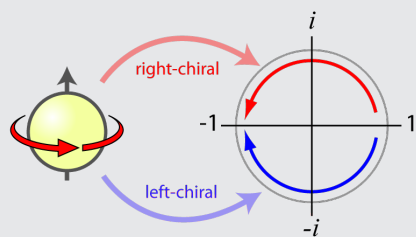
Besides asymptotic freedom and confinement, QCD has another fascinating feature: chiral symmetry. By looking at fermions, it is possible to give you an intuitive picture of the meaning of chirality. By rotating a spin- $\frac{1}{2}$  particle like a fermion 360 degrees, one does not get the same quantum mechanical state, but the same state up to a minus sign. A fermion's chirality tells you how it gets to this minus sign by means of a complex number (see figure 3).

The Lagrangian of QCD (formula 4) can be written in terms of these left (L) and right (R) handed components of the quark field. This Lagrangian is also invariant under a global  $U(N_f)_L \times U(N_f)_R$  symmetry acting on the flavour indices. This symmetry is called the chiral symmetry of the strong interactions. Chiral symmetry means that all states with opposite parity have equal masses. Parity is the transformation that

inverts all spatial components of the position vector.

Unfortunately, the QCD Lagrangian contains a mass term and this mass term explicitly breaks chiral symmetry. It would thus seem that chiral symmetry is not a very useful symmetry in the real world. We can however use it as an approximate symmetry for the light quarks; the explicit breaking of chiral symmetry due to the masses is small compared to the relevant scale of the gluon interactions. By focussing on QCD at low energies which can be well described by including only the u, d and s quarks and ignoring heavier quarks, can lead to useful approximations of the strong interactions in the real world.

Besides the explicit symmetry breaking due to the mass term, there is another type of breaking of this continuous symmetry. Spontaneous symmetry breaking means that the currents of the symmetry are conserved (the Lagrangian is invariant), but the ground state is not invariant under the action of the corresponding charges. For every broken generator of a



**FIGURE 3** Rotating a left- versus a right-chiral fermion 360 degrees about its direction of motion, both particles indeed pick up a minus sign. However, the left-chiral fermion goes one way around the complex plane, while the right-chiral fermion goes the other way. As we rotate a particle, the value of the phase moves along the circle depicted on the right. Rotating the particle 360 degrees brings you halfway around the circle in a direction that depends on the chirality of the fermion [4].

continuous global symmetry of the Lagrangian, there exists a massless spin-zero particle referred to as the Goldstone boson. If the symmetry is explicitly broken by a mass term in the Lagrangian, then the Goldstone bosons acquire a mass and they are referred to as pseudo-Goldstone bosons.

Chiral symmetry is spontaneously broken in QCD:  $U(N_f)_L \times U(N_f)_R \rightarrow SU(3)_v \times U(1)_v$ . Here  $U(1)_v$  corresponds to baryon number symmetry. The  $SU(3)_v$  symmetry group leads to the pseudo-Goldstone bosons that correspond to the 8 pseudoscalar mesons: the pion ( $\pi^\pm, \pi^0$ ), the kaon ( $K^\pm, K^0; \bar{K}^0$ ) and the eta ( $\eta$ ) meson.

### QCD at nonzero temperature

Quantum Chromodynamics at zero temperature has asymptotic freedom, confinement and chiral symmetry is spontaneously broken as described above. However, the properties of strongly interacting matter change distinctly during the transition from low to high temperatures, as is currently explored at heavy ion colliders like the Relativistic Heavy Ion Collider (RHIC) and the LHC-experiment ALICE. At  $T > T_c$  the hadronic picture even breaks down.

In this new phase the theory describing the strong interactions becomes scale invariant. Scale invariance is the invariance of the Lagrangian under the scale

transformation  $x \rightarrow x' = e^{ax}$ , where  $x$  is a point in spacetime and  $a$  is a real scalar. For the theory to be scale invariant all relevant scales should be absent, meaning that it should be deconfined and chiral symmetry is restored.

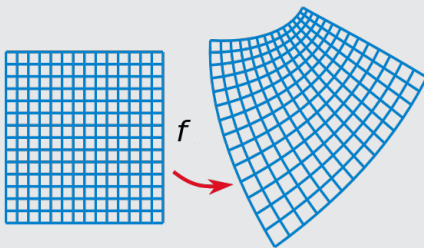
All theories in four spacetime dimensions with interactions of fields with spin  $\leq 1$ , where the derivative interactions are of the same form as those in renormalizable theories, have the property that scale invariance implies conformal invariance.

The conformal symmetry group is the largest possible non-supersymmetric spacetime symmetry of an interacting field theory. Such field theories are called conformal field theories (CFT). A conformal mapping (local conformal transformation) defined by  $y = f(x)$  can be viewed as a map that performs a local stretching and rotation on  $x$ . The angle between any intersecting curves is preserved under this conformal mapping (see figure 4).

Conformal invariance is of particular interest because it is highly restrictive. So when a theory is indeed conformally invariant many properties are known. Adding a scale to such a theory can be treated as a small perturbation to the scale invariant theory and the reaction of the theory is predictable. It is believed that the early Universe was a small deviation away from the conformal fixed point. Studying QFT thus, hopefully, gives us insight in the physics of the early Universe and from that, more insight in the physics of today's Universe •

### References

- [1] L. Alvarez-Gaume and M.A. Vazquez-Mozo. An Invitation to Quantum Field Theory, volume 839 of Lecture Notes in Physics. Springer, 2012.
- [2] D. J. Gross and F. Wilczek. Ultraviolet behavior of non-abelian gauge theories. *Physical Review Letters*, 30:1343, June 1973.
- [3] H. D. Politzer. Reliable perturbative results for strong interactions? *Phys. Rev. Lett.*, 30(26): 1346, June 1973.
- [4] F. Tanedo. (2011). Retrieved August 6, 2014, from <http://www.quantumdiaries.org/2011/06/19/helicity-chirality-mass-and-the-higgs/>



**FIGURE 4** A conformal mapping preserves the angle between any intersecting curves.



## How do you make a lithography system that goes to the limit of what is physically possible?

At ASML we bring together the most creative minds in science and technology to develop lithography machines that are key to producing cheaper, faster, more energy-efficient microchips.

Per employee we're Europe's second largest private investor in R&D, giving you the freedom to experiment and a culture that will let you get things done.

Join ASML's multidisciplinary teams and help us push the boundaries of what's possible.

[www.asml.com/careers](http://www.asml.com/careers)

# ASML

For students who think ahead

# Non-flat Delaunay Triangulations

BY RAMSAY DYER

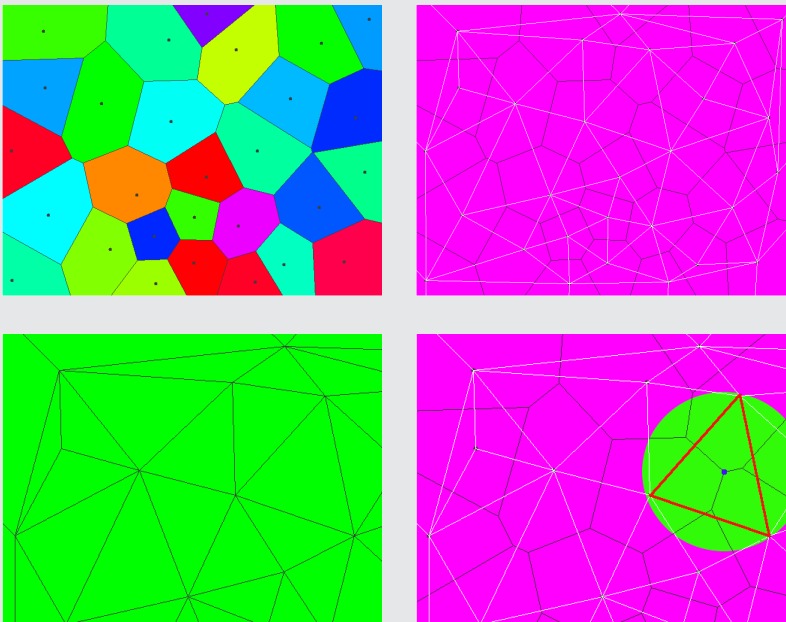
In computer graphics a triangle mesh is a common way to represent the surface of an object. It allows us to approximate the surface with a finite set of data. The Delaunay triangulation is a convenient tool for constructing triangle meshes and understanding some of their properties. We explore some of these properties and problems that can arise.

In order to have a digital representation of a surface of some object, we need to somehow *discretise* it; we need to represent the surface with a finite set of data. There are several ways to do this, but one of the most common is the triangle mesh. Examples of

triangle meshes representing somebody's left hand are shown in figure 2. We can think of the triangle mesh as encoding two types of information. The first is the geometric positions of the vertices of the triangles. We can think of these points as *sample points* on the

underlying ideal hand. As shown in figure 2, the quality of the geometric approximation depends on the density of the sample points. So one aspect of mesh construction involves creating a distribution of sample points that optimizes the geometric fidelity of the mesh.

The second kind of information encoded in the mesh is the purely combinatorial information that dictates how the sample points are connected, i.e., the description of which triangles we create from the set of vertices. As evident from figure 3, in which two different mesh connectivities on the same vertex set are shown, this combinatorial information can also



**FIGURE 1** A Voronoi diagram, and the corresponding Delaunay triangulation. The Voronoi cells of a set of points are depicted top left. The Delaunay triangulation is defined by connecting points whose Voronoi cells intersect, as shown top right, and bottom left. The figure at bottom right highlights a characteristic property of the Delaunay triangulation: the circumscribing ball of a Delaunay triangle does not contain any of the other vertices of the triangulation.

have a significant effect on the geometry of the mesh. The Delaunay paradigm provides us with a framework for allowing geometry to guide the decision of how to connect the dots.

## Voronoi diagrams and Delaunay triangulations

To get the idea of a Delaunay triangulation, consider a finite set of points  $P$  in the plane. We want to connect these points so that they define triangles that tile the region of interest. How do we decide which points will form triangles with a given point  $p$ ? A natural idea is to choose the points that are “nearest” to  $p$ . But what does that mean? How do we decide which points are close enough to be considered neighbours of  $p$ ?

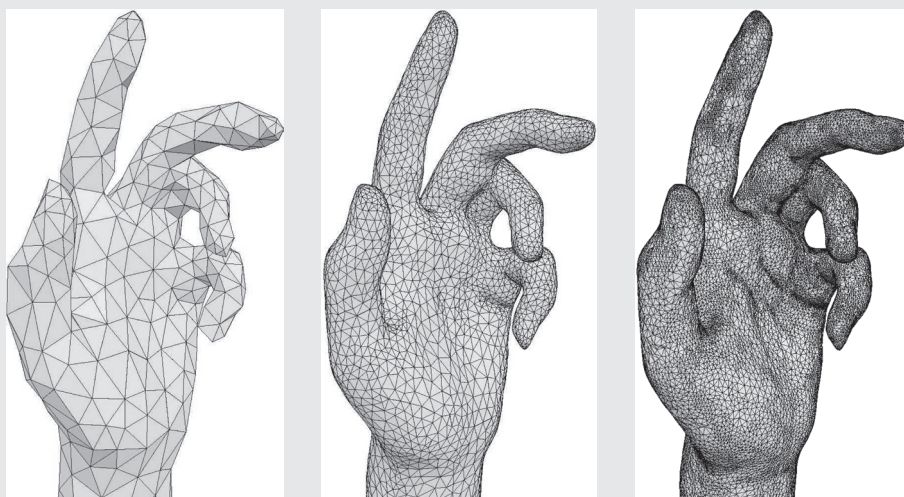
Well, we can take the suggestion in the word “neighbour”, and give  $p$  its own real estate. The *Voronoi cell* of  $p \in P$  is the portion of the plane on which  $p$  can be considered the closest point of  $P$ :

$$V(p) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(x, p) \leq d(x, q) \text{ for all } q \in P\}$$

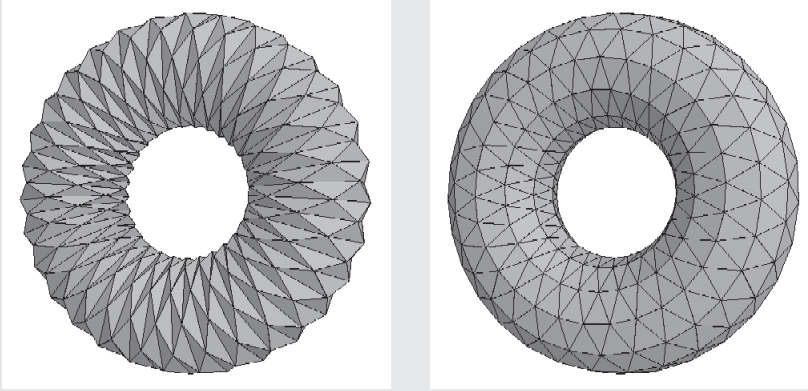
The Voronoi cells of the points of  $P$  yield a tessellation, or tiling, of the plane called the *Voronoi diagram* of  $P$ . Figure 1 shows a colourful Voronoi diagram in the top left.

We say that  $p$  and  $q$  are neighbours if their Voronoi cells have a non-empty intersection. By connecting all the neighbours with straight lines, as indicated in the top right of figure 1, we obtain a new tessellation, called the *Delaunay triangulation*, as shown on the bottom left of figure 1.

When we say that the Voronoi cells tessellate the plane, we mean that they cover the plane, and they only overlap along common boundaries. A triangulation is a tessellation composed of triangles. We can't see it in figure 1, but the Voronoi cells corresponding to points near the edge of the figure extend out indefinitely; they are unbounded. The points that have unbounded Voronoi cells belong to the boundary of the convex hull of  $P$ ; if the points were pegs, these are the ones that would come into contact with an elastic band that is allowed to contract after enclosing all the points.



**FIGURE 2** Resolution: Dierent resolution meshes of the same surface. From left to right 500 vertices, 5000, vertices and 25000 vertices



**FIGURE 3** Connectivity: Different meshes on the same set of vertices.

The Delaunay triangulation is a tessellation of the convex hull<sup>1</sup> of  $P$ . It has a nice relationship with the Voronoi diagram. At an arbitrary point  $x \in \mathbb{R}^2$ , consider the largest open ball  $B$  centered at  $x$  that does not contain any point from  $P$ . If  $x \in V(p)$  then  $p$  will lie on the boundary of  $B$ . If  $x$  lies on the boundary between  $V(p)$  and  $V(q)$ , then both  $p$  and  $q$  lie on  $\partial B$ , and they are the vertices of a Delaunay edge  $[p, q]$ . In the special case where  $x$  is at a corner of a Voronoi cell (we say  $x$  is a *Voronoi vertex*), then all the points whose Voronoi cells share  $x$  will lie on  $\partial B$ ; these are the vertices of a Delaunay triangle. An example is shown in the bottom right of figure 1.

These maximal empty balls are called *Delaunay balls*, and they establish a duality between the Voronoi diagram and the Delaunay triangulation: there is a one to one correspondence between Voronoi objects (cells, edges, and vertices) and the Delaunay objects (vertices, edges, and triangles). The Delaunay balls also provide us with a way to understand why the Delaunay tessellation is made up of triangles: a circle is defined

by 3 points, so it has to be a coincidence to have 4 points from  $P$  on the boundary of a Delaunay ball.

Such coincidences can of course occur. If there are more than three points on the boundary of a Delaunay ball, we say the point set  $P$  is *degenerate*. There are a few ways to deal with degenerate configurations. For example we can say that the *Delaunay tes-*

*sellation* may contain arbitrary polygons, not just triangles, and then triangulate these arbitrarily to obtain a Delaunay triangulation. However another common way of dealing with degeneracy, at least in theoretical work, is to ignore it; we dismiss this problem with the observation that even if we were so unfortunate as to obtain a degenerate point set, we can make an arbitrarily small perturbation of these points and remove the degeneracy.

We will adopt this viewpoint to begin with, but we will see that interesting problems lurk in the vicinity of degeneracy, and sometimes ignoring it is not the best policy.

The Delaunay triangulation is the only triangulation with the property that every triangle admits a circumscribing Delaunay ball, and if  $P$  is non-degenerate, then the Delaunay triangulation is unique. The Delaunay triangulation is often defined this way, without any reference to the Voronoi diagram. In fact, Delaunay [3] demonstrated something stronger. Assuming

1) Figure 1 shows Delaunay edges extending out of the image, but this is just an artifact of the algorithm that constructed the Delaunay triangulation (a point at infinity was added).



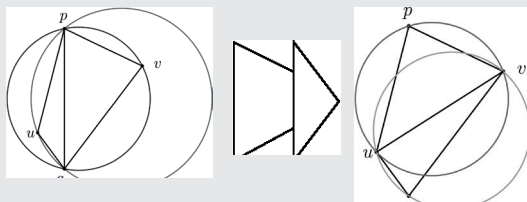
it is not on the boundary, an edge  $e = [p, q]$  in a triangulation belongs to two triangles  $t = [u, q, p]$ , and  $s = [v, p, q]$ . We say that  $e$  is *locally Delaunay* if  $v$  does not lie in the circumball  $B_t$  of  $t$ , and  $u$  does not lie in the circumball  $B_s$  of  $s$ . In fact, the two conditions are redundant: it is a good exercise to show that  $v \in B_t$  if and only if  $u \in B_s$ .

Delaunay showed that a triangulation of the convex hull of  $P$  is the Delaunay triangulation if and only if every interior edge is locally Delaunay. A convenient way to check if an edge  $e$  is locally Delaunay is to consider the sum of the angles opposite  $e$  in the two triangles involved. The edge is not locally Delaunay if and only if this sum exceeds  $\pi$ . This is not hard to check; notice that then the configuration is degenerate, if the sum is exactly  $\pi$ .

If an edge is not locally Delaunay, we can *flip* it to obtain an edge that is locally Delaunay. This means that we replace the triangles  $[u, q, p]$  and  $[v, p, q]$  with the triangles  $[p, u, v]$  and  $[q, v, u]$ , as shown in figure 4. Thus we replace the edge  $e = [p, q]$  with the edge  $e' = [u, v]$ , which is the other diagonal of the quadrilateral  $[u, q, v, p]$ . This operation is called a *Delaunay edge flip*.

This suggests an algorithm to turn a given triangulation into a Delaunay triangulation. If there is any edge that is not locally Delaunay, we flip it. We keep doing this until all the edges are locally Delaunay. Then we will have a Delaunay triangulation. But how do we know that we will ever reach the termination condition? This is not obvious, because when we flip an edge  $e$ , some edges of the quadrilateral  $[u, q, v, p]$  that were locally Delaunay may now become not locally Delaunay.

In order to demonstrate that the algorithm does not get caught in an endless loop, people have found properties that are consistently improved with each edge flip.



**FIGURE 4** A Delaunay edge flip. We replace the edge  $[p, q]$  that is not locally Delaunay, with the edge  $[u, v]$ , that is.

For example, every time we perform a Delaunay edge flip, the largest of the two circumradii of the adjacent triangles decreases. If we put all the circumradii of the triangles in a triangulation in order from largest to smallest, then Delaunay edge flips always change the list to one that is smaller in the lexicographic order. Since there are a finite number of triangulations on  $P$ , the algorithm is guaranteed to terminate.

This observation comes with a bonus: it means that the Delaunay triangulation minimizes the largest circumradius. There are several other properties that are optimized by Delaunay triangulations, and which can be used to demonstrate termination of the edge flipping algorithm. The smallest angle amongst all the angles in all the triangles is maximized by the Delaunay triangulation, for example.

### Self-Delaunay meshes

Now we have a framework to help us think about constructing triangle meshes. Notice that the definition of a Voronoi cell makes sense in any space where we have a way of measuring distances: the concept of a Voronoi diagram naturally extends to any metric space<sup>2</sup>. However, the concept of a Delaunay triangulation is more restrictive. That doesn't stop us from playing a

2) In this most general setting, the Voronoi diagram need not be a "tessellation" in any meaningful sense.

bit more with the concept however.

Imagine we have a surface  $M$  on which we have placed a bunch of sample points  $P$ . We can imagine a Voronoi diagram for these points, as shown in figure 6. In order to create the Voronoi diagram, we need to decide how to measure distances on the surface. One way would be to use the straight-line distance in the ambient space. In this case, the Voronoi diagram is called the *restricted Voronoi diagram*, because it is what you would obtain if you consider the Voronoi diagram of  $P$  in the ambient space  $\mathbb{R}^3$  and define the Voronoi cells on the surface as the intersection of the ambient cells with the surface. The metric on the surface defined this way is sometimes called the *extrinsic metric*.

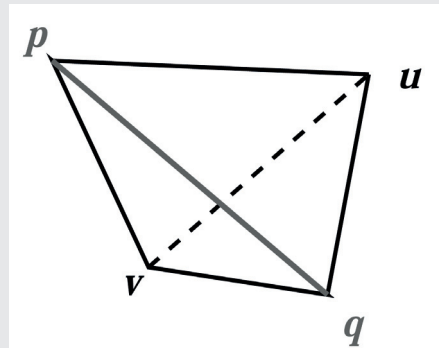
Another way to measure distances is to use the *intrinsic metric* of the surface. In this case the distance between two points is given by the length of the shortest curve on the surface that connects the points. You might think that it shouldn't make an important difference how we measure distances, especially if the sample points  $P$  are distributed densely on a smooth surface  $M$ , and in a sense you would be right. However, no matter how dense the set  $P$  is, in general there *is* a difference in which points have neighbouring Voronoi cells, depending on which metric you choose. This will become relevant for us, and it is related to the problem of degeneracy mentioned above.

Now suppose that the surface  $M$  already is a triangle mesh with vertex set  $P$ , and let's agree to use the intrinsic metric. Geometrically, this surface is flat everywhere except at the vertices. That might seem like a strange claim: the left hand triangle mesh of figure 2 obviously "bends" at the edges of triangles. But the bends are not noticed by the intrinsic metric. If we draw the shortest curve between two points on  $M$ , and that curve does not go through any of the vertices, then we can cut out the sequence of triangles traversed by the curve and lay them out on the plane. The curve will be a straight line! In particular, any two triangles  $[u, q, p]$  and  $[v, p, q]$  that share an edge  $e = [p, q]$  form a *hinge* with  $e$ , and we can unfold them on the plane

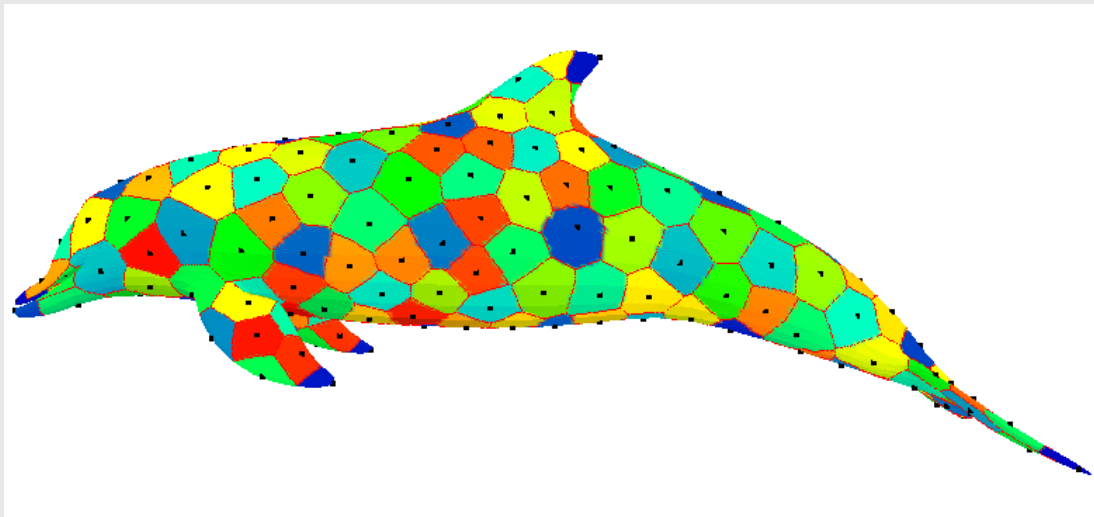
without distorting any of the distances.

From an intrinsic perspective the edges aren't even there, so let's pretend we can't see them. We can imagine painting the edges on the surface so that we can see them. Now we can perform the Delaunay edge flipping algorithm on  $M$ : when we flip edge  $e$ , we erase it, and then we paint in the edge  $\{u, v\}$ , which is the shortest path connecting  $u$  and  $v$  *within* the painted quadrilateral  $\{v, p, q, u\}$ . I have used curly brackets to remind us that the edge  $\{u, v\}$  is not a straight line in the ambient space, however the triangles that we form this way always have the property that they can be unfolded on the plane yielding an ordinary Euclidean triangle.

It turns out that, because the hinges always have flat geometry, the properties that are optimised by the Euclidean Delaunay edge flipping algorithm are also optimized by this algorithm, although there are some additional technicalities to work through in order to establish termination of the algorithm [2]. The resulting "triangulation" is an intrinsic Delaunay triangulation of  $P$  on  $M$ . The motivation for Bobenko and



**FIGURE 5** A flip-tet. An extrinsic flip of edge  $[p, q]$  means replacing triangles  $[v, q, p]$  and  $[u, p, q]$  in the mesh, with triangles  $[p, v, u]$  and  $[q, u, v]$ .



**FIGURE 6** A Voronoi diagram on a surface.

Springborn’s introduction [2] of this triangulation is that certain “discrete differential” operations that are important in triangle mesh processing behave particularly well on the intrinsic Delaunay triangulation.

From a practical point of view, the intrinsic Delaunay triangulation, and the algorithm to produce it, are inconvenient because we need a separate, and quite complicated, data-structure to keep track of the “painted on” triangulation, as well as the data-structure that encodes the triangles of the mesh itself. It would be nice if the mesh triangles of the mesh coincided with the intrinsic Delaunay triangulation. We will call such a mesh a *self-Delaunay mesh*.

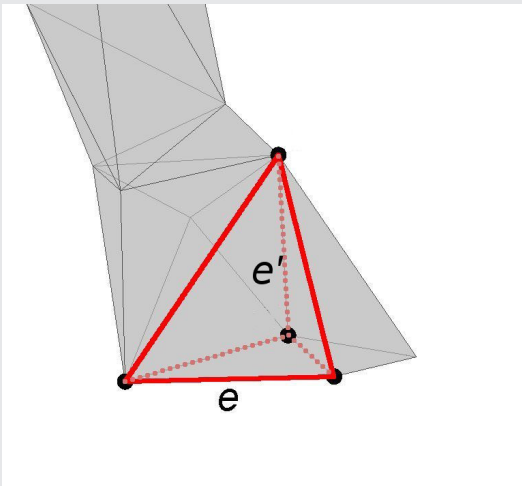
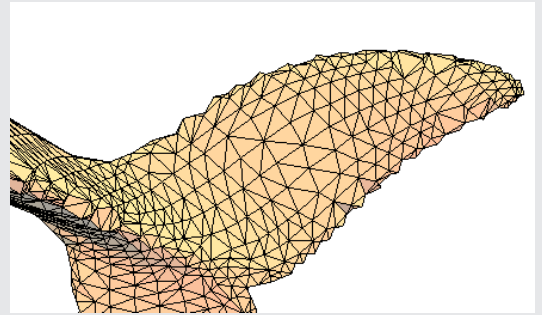
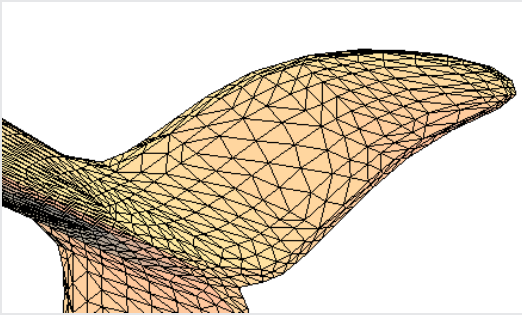
We consider a variation on the edge flipping algorithm, which we call *Delaunay extrinsic edge flipping*. The setting is the same:  $P$  is the set of vertices of the mesh  $M$ , but now our edges will always be mesh edges, and when we flip an edge, we will change the mesh itself.

Now, instead of taking a hinge and unfolding it to form a quadrilateral in which to flip the diagonal, we consider the tetrahedron in  $\mathbb{R}^3$  formed by the hinge. An example of such a *flip-tet* is shown in figure 5. Flipping edge  $e$  now means replacing the triangles that contain  $e$  in the mesh with the other two triangle faces of the flip-tet. We call the edge  $e'$  in the flip-tet that is not contained by either of the triangles that contain  $e$  the *opposing edge* to  $e$ . By considering the elementary geometry of the tetrahedron, we see that if the angles subtended by  $e$  sum to more than  $\pi$ , i.e., if  $e$  is not locally Delaunay, then the angles subtended by  $e'$  sum to less than  $\pi$  (hint: think of  $e'$  as being elastic and consider squashing the tetrahedron onto the plane). This means that a Delaunay extrinsic edge flip always transforms a not locally Delaunay edge into one that is locally Delaunay. However, it is possible for  $e$  and the opposing edge  $e'$  to both be locally Delaunay, and this is not a “degenerate case” in any sense. This means that we cannot hope to have a unique self-Delaunay mesh associated to a given input mesh.

The Delaunay extrinsic edge flip algorithm is similar in spirit to the one described above that “painted” the flipped edges on the surface, but now the mesh itself is updated to keep track of the evolving triangulation. At any step in the algorithm, the decision of whether or not to flip an edge is exactly the same in the two algorithms, but the theoretical setting changes dramatically in the new algorithm. In both algorithms the metric that drives the Delaunay edge flipping algorithm is the intrinsic metric of the mesh. However, whereas that metric never changed in the former algo-

rithm, in this new one the intrinsic geometry of the mesh changes a little bit with each edge flip.

If we assume that the vertex set  $P$  is very dense, and that triangles that share a common vertex in the mesh are close to being co-planar, as in the right-hand mesh of figure 2, then an extrinsic edge flip will not change the geometry of the mesh very much: the flip-tet will be very “flat”. However, “not very much” change is dramatically more than no change, and it turns out that all the theoretical properties that are optimized by



**FIGURE 7** Problems associated with Delaunay extrinsic edge flipping. On the top we see that an initial mesh left may look much nicer than a self-Delaunay mesh on the same vertices right: minimising surface area is not aesthetically pleasing unless the sampling density is very high in regions of high curvature. On the bottom left, a more fundamental problem is indicated: if the sampling is too coarse, the opposing edge  $e'$  may already exist in the mesh (on the “other side”), in which case we say that  $e$  is *unflippable*.

planar Delaunay edge flips, and the painting Delaunay edge flips, are in general not optimized by the new algorithm.

In order to find a property that is optimized by the new algorithm, and thus show that it will terminate, we look to a property that is invariant in the other algorithms: surface area. It turns out that if the edge  $e$  is not locally Delaunay, then the surface area of the hinge defined by  $e$  will be greater than or equal to the surface area of the hinge defined by  $e'$ , with equality only in the case when the four vertices involved all lie on a common plane.

One way to see this is to employ *Bretschneider's formula*, that says that if  $A$  is the area of a planar quadrilateral with edge lengths  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , and  $d$ , then

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^2 = & (s - a)(s - b)(s - c)(s - d) \\ & - abcd \cos^2 \left( \frac{A+C}{2} \right) \end{aligned}$$

where  $s = (a+b+c+d)/2$  is the semi-perimeter, and  $A$  and  $C$  are two opposite angles in the quadrilateral. The argument that surface area is reduced is not difficult to see once we observe that the hinges associated with  $e$  and  $e'$  both unfold to planar quadrilaterals with the same edge lengths, and that the sum of all the angles subtended by  $e$  and  $e'$  is less than or equal to  $2\pi$ , with equality only when the four vertices are coplanar in the mesh.

With this observation we can be ensured that the extrinsic Delaunay edge flip algorithm will terminate. The torus on the right in figure 3 was obtained from the torus on the left by the Delaunay extrinsic edge flip algorithm. However, there are complications. One is that the Delaunay extrinsic edge flipping algorithm does not always aesthetically improve the mesh, in the way it did for the torus example. When the sampling density is not particularly high, minimising surface area can make for an uglier mesh. But there is a more fundamental problem. It might be that the opposing edge  $e'$  to a not locally Delaunay edge  $e$  already exists

in the mesh. In this case flipping  $e$  would change the topology of the mesh: the mesh would no longer represent the boundary of a surface of a single connected object. This is a fundamental problem, and we say that such an edge  $e$  is *unflippable*. Figure 7 describes examples of these problems.

We are able to avoid these problems by adding vertices to the mesh in a particular way, thus ensuring that the algorithm always terminates by producing a self-Delaunay mesh. However, the problem of unflippable edges means that we do not even have a demonstration of the existence of a self-Delaunay mesh associated with a given initial mesh and fixed vertex set  $P$ . We can show that if the mesh satisfies a *regularity property*: that consistently oriented normals to triangles that share a vertex differ by an angle less than  $\pi/2$ , then there cannot exist an unflippable not locally Delaunay edge. However, even if the initial mesh has this property, we have not found a guarantee that it will be maintained. In fact, if the vertices are not very dense, Delaunay extrinsic edge flips can turn a nice mesh into one that violates the regularity property and contains an unflippable not locally Delaunay edge •

## References

- [1] J.-D. Boissonnat and S. Oudot. Provably good sampling and meshing of surfaces. *Graphical Models*, 67(5):405{451, 2005. 11
- [2] A. I. Bobenko and B. A. Springborn. A discrete Laplace-Beltrami operator for simplicial surfaces. *Discrete and Computational Geometry*, 38(4):740{756, 2007. 6
- [3] B. Delaunay. Sur la sphere vide. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Otdelenie Matematicheskii i Estestvennyka Nauk*, 7:793{800, 1934. 4
- [4] T. K. Dey. *Curve and Surface Reconstruction; Algorithms with Mathematical Analysis*. Cambridge University Press, 2007. 14
- [5] H. Edelsbrunner and N. R. Shah. Triangulating topological spaces. *Int. J. Comput. Geometry Appl.*, 7(4):365{378, 1997. 10

# Limburgse vlaai

DOOR DOUWE VISSER

Thuis hebben we een pruimenboom en het probleem van een pruimenboom is dat je de pruimen allemaal in een aantal weken moet gebruiken, wanneer de pruimen rijp zijn. Daarom heb ik een aantal vlaaien gemaakt. Het mooie van een Limburgse vlaai is dat je alle vruchten voor de vlaai kunt gebruiken.

**W**at is een vlaai? Een vlaai is een deegbodem met daarop een vruchtenvulling, niet meer en niet minder. In dit recept voegen we echter ook nog een laag banketbakkersroom toe, deze is geheel facultatief. Sommige kenners vinden deze banketbakkersroom erg lekker bij zogenoemde fruitvlaaien, met vruchten zoals aardbij, ananas of mango. Terwijl ze het banketbakkersroom niet zouden toe voegen aan "Limburgse" vlaaien. Ik daarentegen maak elke vlaai met banketbakkersroom.

Het recept bestaat uit vier afzonderlijk delen. Namelijk het maken van het deeg, het maken van het banketbakkersroom, het bereiden van de vruchten en de afwerking.

## Ingrediënten

### Vlaaideeg

- 100 ml melk
- 2 el suiker
- 1 zakje gedroogde gist
- 200 g bloem
- 30 g boter
- 1 mespuntje zout
- 1 eidooier

### Banketbakkersroom

- 250 ml melk
- 75 g suiker
- 1 vanillestokje
- 2 eidooiers
- 1 el bloem

### Vulling

- 1 kg vruchten

**Moeilijkheid:**



**Personen:**

8

**Bereidingstijd:**

**+/- 30 min bereiding  
20 min. in de oven**

### Glanslaag

- 2 blaadjes gelatine
- 1 limoen
- 100 ml water
- 100 g suiker
- 140 g jam (het liefst van dezelfde soort als de vruchten gebruikt in de vulling)

### Garnering

- 1 pakje slagroom
- 25 g suiker

### Extra nodig

- bloem om te bestuiven
- boter om in te vetten
- taart-/vlaaivorm van ≈22 cm doorsnede
- spuitzak
- gekartelde spuitmond

## Bereiding

### Vlaaideeg

Verwarm de melk tot handwarm en los de gist er in op. Maak een kuiltje in de bloem en meng daarin de melk met de suiker, de boter, zout en de eidooier door elkaar. Kneed tot een soepel deeg. Laat het deeg, in een met bloem bestoven en afgedekte kom, circa 30 minuten rijzen.



**Tip:** Als het deeg te plakkerig is, gebruik meer bloem.

**Tip:** Als je het deeg nog niet na 30 minuten kunt gebruiken zet het dan even in de koelkast.

### Banketbakkersroom

Doe de melk in een pan. Voeg de suiker, de eidooiers en de bloem toe. Halveer het vanillestokje in de lengte en voeg de merg toe aan het geheel. Breng alles af en toe roerende aan de kook en kook het zo'n twee minuutjes door.

### Vulling

Was de vruchten en haal de eventuele pitten of dopjes weg. Bepaal of je de vruchten mee kunt bakken.

Vruchten die je mee kan bakken zijn, onder anderen: abrikozen, appel, kersen, linzen, pruimen en frambozen. Vruchten die je niet mee kunt bakken zijn onder anderen: aardbeien, sinaasappelen, ananas en mango. Mocht jouw favoriete vrucht hier niet tussen staan, dan kan je via "trial and error" erachter komen of je deze mee kan bakken of niet.

### Vlaai bakken

Verwarm de oven voor op 190 °C. Vet een vlaai vorm in en rol het vlaaideeg dun uit. Bekleed de vorm ermee en prik met een vork gaatjes in de bodem. Vul de vorm eventueel met de banketbakkersroom. Indien je een vulling gebruikt die je mee kan bakken, voeg deze er nu in. Bak de vlaai bruin in zo'n 20 minuutjes.

**Tip:** Voordat je het deeg in de vorm doet, helpt het om eerst het deeg nogmaals te kneden.

**Tip:** Als het deeg te plakkerig is, gebruik meer bloem.

### Afwerking

Week de gelatine in ruim koud water. Halveer de limoen en pers het sap eruit. Breng het water, suiker en het limoensap aan de kook tot de suiker is opgelost. Haal de pan van het vuur, voeg de jam toe en roer het geheel goed door. Los de gelatine erin op en roer goed door. Laat de geleï afkoelen tot 40 °C en bestrijk de taart ermee. Klok de slagroom met de 25 g suiker stijf. Wacht tot de taart helemaal is afgekoeld. Werk de vlaai af met toefjes slagroom •

**Tip:** Als je niet wacht met het maken van toefjes slagroom dan lossen ze op in de glanslaag.

### Referenties

[1] 24 Kitchen



