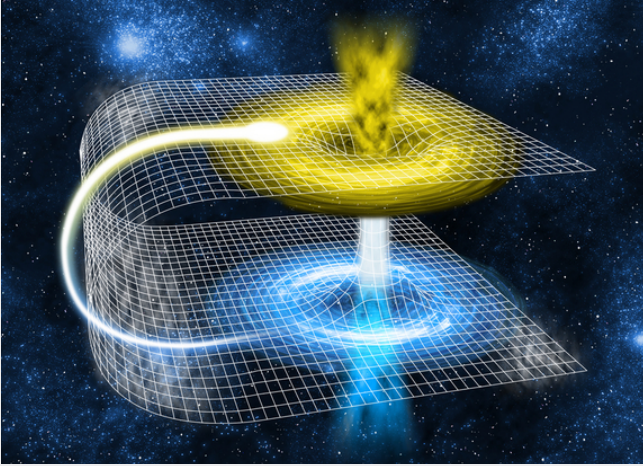




# perio\*diek

op regelmatige tijden terugkerend jaargang 2014 nummer 2

# Inhoud

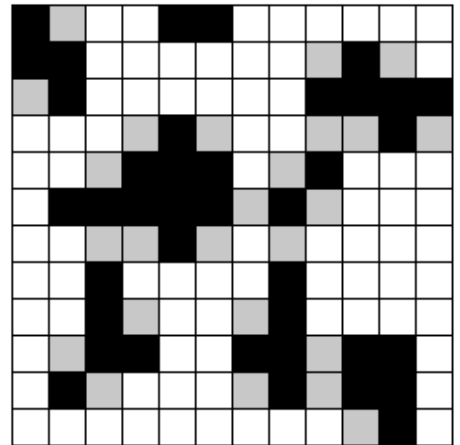


## 19 Ons Jonge Heelal

Ga met gids Marco Spaans op ontdekking naar het ontstaan van het heelal. We beginnen bij de oerknal en daarna gaan we de vorming van planeten en zwarte gaten bekijken.

## In deze Periodiek

- 4 In het nieuws
- 6 Het leven van Évariste Galois
- 14 Van de Extern
- 15 Siteswaps
- 19 Ons Jonge Heelal
- 24 Breinwerk
- 26 Bootstrappercolatie
- 30 SIHB: De eerste weken
- 34 Koken: Visterine van huize Jordens
- 36 Atomic Force Microscopy



## 26 Bootstrappercolatie

Bootstrappercolatie: een prachtige wiskundige puzzel waaraan veel mensen uit allerlei disciplines werken.



## 6 Het Leven van Évariste Galois

Een ode aan deze briljante en excentrieke wiskundige.

**Redactie** Derk Rouwhorst, Steven van der Veeke, Douwe Visser, Bart Marinissen, Maïke Jaspers, Joyce Popping, Klaas Hakvoort.

**Scribenten** Paul Helminck, Jaap Eising, Wouter van Doorn, Anneroo Everts Marco Spaans, Aernout van Enter, Bernd Rietberg, Leila Jordens-Cotran, George Palasantsaz

**Adverteerders** Topicus (p. 12, 13), Philips (p. 33), Talent&Pro (p.43), Schut (p. 44).

Ook adverteren? Neem contact op via [bestuur@fmf.nl](mailto:bestuur@fmf.nl).

**Oplage** 1100 stuks

**Druk** Gildeprint

**ISSN** 1875-4546

**De Periodiek** is een uitgave van de Fysisch-Mathematische Faculteitsvereniging en verschijnt vier keer per jaar. Eerder uitgebrachte Periodieken zijn na te lezen op [perio.fmf.nl](http://perio.fmf.nl). De redactie is te bereiken via [perio@fmf.nl](mailto:perio@fmf.nl).

**FMF**

## Van de redactie

**D**e lente is aangebroken! De dagen lengen, de temperatuur stijgt en de zon tovert een glimlach op mijn gezicht. Wat kan ik er toch van genieten als de winter weer voorbij is en al het leven weer opnieuw begint. Maar we moeten ons niet overhaasten, de bomen hebben namelijk nog geen bladen en de meeste zaden zijn nog lang niet uitgekomen. Dat klopt ook wel, want het is hun tijd nog niet, alle goede dingen komen langzaam. Soms willen we dat dingen meteen gebeuren als we er zin in hebben. Ik wil bijvoorbeeld buiten in een t-shirtje op een terrasje in de zon zitten en hoewel de zon erg haar best doet om dit waar te maken, is het nog steeds maart en duurt het nog even voordat we dit massaal kunnen gaan doen. Daarom gaan wij van de redactie, tot de tijd is aangebroken dat wij als Nederlanders met z'n allen naar het strand

gaan, eerst de volgende Perio\*diek afmaken. Want zeg nou zelf: wat is er mooier dan buiten met een Perio\*diek op een terrasje in de zon zitten?

Omdat het dromen zelf soms zo leuk kan zijn, dromen wij van de redactie nu alvast van verre landen zoals het prachtige exotische Indonesië, dat tevens het land is waar onze rubriek studeren in het buitenland over gaat. Ik weet niet hoe het bij jou zit, maar wat zou het toch prachtig kunnen zijn als je een studie kan doen in zo'n mooi land. Ook hebben een aantal van jullie een oude Perio\*diek mee opgestuurd gekregen, dit is om jullie alvast een eindje op weg te helpen bij het Breinwerk, dat op niemand anders dan Sherlock Holmes geïnspireerd is.

# In het nieuws

## Nieuwe soort veelvlakken ontdekt

De familie van de veelvlakken, bekend van de kubus en de piramide, heeft er een zusje bijgekregen: het goldberg-veelvlak. Dat is bijzonder, want de laatste gezinsuitbreiding was 400 jaar terug. Misschien ken je ze van de meetkunde op school: ingewikkelde 3D-figuren waarvan de zijden een regelmatig patroon vormen, zoals de tetraëder: een piramide die uit louter driehoek bestaat. Deze is onderdeel van de Platonsche veelvlakken. Er zijn nog twee veelvlaggroepen, maar sinds de zeventiende eeuw is er weinig spannends meer bijgekomen in de wereld van 3D-figuren. Inspiratie voor deze veelvlakken kwam van de wiskundige Michael Goldberg, die een aantal goldberg-veelvlakken bedacht. Deze veelvlakken bleken echter geen veelvlakken in de strikte wiskundige zin van het woord te zijn, omdat de onderdelen van het veelvlak niet altijd 'plat' waren. De onderzoekers vroegen zich af hoe je Goldbergs figuren dan wél tot regelmatig veelvlakken kan maken. Ze begonnen met een kubus en 'bliezen die op'. Daardoor gaan de zijden van de kubus bol staan. Vervolgens moesten ze de bolle gedeelten zo opbreken, dat het gehele bolle vlak uit (platte) veelhoeken bestaat. Uiteindelijk lukte het ze om zo'n figuur te maken, die niet thuishoort in de andere veelvlak-families. Door niet een kubus, maar een an-

dere driedimensionale figuur 'op te blazen' kan je nog veel meer van deze nieuwe veelvlakken maken, oneindig veel zelfs. Dat is bijzonder, omdat er in de categorieën die bestonden altijd maar een eindig aantal figuren bestond.

Kennislink

## Wetenschappelijke gegevens gaan in hoog tempo verloren

Op de zolder van hun ouders, in dozen in de garage, of opgeslagen op ouderwetse floppy's. Dit zijn slechts een paar van de onbereikbare plekken waar wetenschappers hebben toegegeven hun oude onderzoeksdata op te slaan. Zulke praktijken betekenen dat data in rap tempo voor de wetenschap verloren gaat, zo heeft een recente studie gevonden. De auteurs van het onderzoek zochten naar de gegevens achter 516 artikelen gepubliceerd tussen 1991 en 2011. Door contact op te nemen met de auteurs van deze artikelen, ontdekten de onderzoekers dat, hoewel de data voor de meeste studies die de laatste twee jaar gepubliceerd zijn beschikbaar was, de beschikbaarheid daarna daalde met 17% per jaar. De beschikbaarheid was slechts 20% voor onderzoek uit de vroege jaren negentig. Een andere uitdaging was het simpelweg vinden van de auteurs en het ontvangen van een antwoord, iets wat het team slechts in 37% van de gevallen lukte. De waar-

schijnlijkheid om een werkend e-mail adres te vinden, zelfs na uitvoerig online onderzoek, daalde met 7% per jaar. Zelfs als de auteur gevonden kon worden met een geldig e-mail adres, reageerde maar 50%, ongeacht de leeftijd van het oorspronkelijke artikel.

Nature

## Intelligentie hangt samen met dikte van hersenschors

De intelligentie van mensen hangt waarschijnlijk samen met de dikte van hun hersenschors, zo blijkt uit nieuw wetenschappelijk onderzoek. De hersenschors wordt bij iedereen langzaam dunner vanaf een leeftijd van vijf jaar, maar een versnelde verdunning wijst op een afname van het IQ. Als de intelligentie van mensen toeneemt, wordt de cortex juist relatief langzaam dunner. Dat melden Canadese onderzoekers in het wetenschappelijk tijdschrift *NeuroImage*. De wetenschappers baseren zich op een onderzoek waarbij 188 proefpersonen twee keer een uitgebreide intelligentietest maakten. Tussen de eerste en de tweede test zat een periode van twee jaar. Bij de deelnemers werd tijdens de testmomenten ook de hersenschors gemeten met behulp van MRI-scans. De onderzoeksresultaten suggereren een samenhang tussen het IQ en de dikte van de hersenschors. In dit hersendeel wordt informatie uit de rest van het lichaam ontvangen en geïnter-

preteerd.

Volgens hoofdonderzoeker Sherif Karama van de McGill University kan de ontdekking verklaren waarom mensen tijdens hun leven vaak verschillende scores halen bij intelligentietesten.

“Deze bevindingen tonen aan dat het IQ echt kan veranderen en dat zo’n verandering niet altijd te wijten is aan meetfouten”, verklaart hij op nieuwssite ScienceDaily.

Mensen zouden volgens hem dan ook niet te lang moeten uitgaan van oude intelligentiemetingen. “Ons IQ is geen vaststaand getal, het vertoont een correlatie met veranderingen in de anatomie van ons brein”, aldus Karama.

Nu



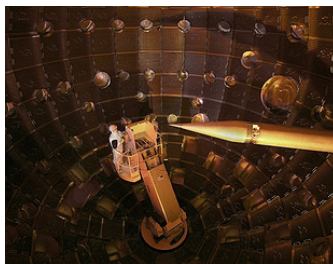
## Kernfusie levert voor het eerst energie op

Kernfusie is het proces dat onder andere de zon voorziet van energie. In tegenstelling tot kernsplijting is kernfusie groene energie. De grondstoffen die erbij gebruikt worden zijn zo goed als onuitputbaar.

Momenteel is er op aarde nog geen werkende kernfusiereactor. Kernfusie gebeurt namelijk alleen in heel extreme condities, die niet makkelijk na te bootsen zijn hier op aarde. Je hebt gigantisch veel druk en warmte nodig voordat deze reactie plaatsvindt. Je moet dus eerst een grote hoeveelheid energie in de reactie stoppen alvorens je er energie uit kan halen.

In november 2013 is het voor de eerste keer gelukt om meer energie uit de brandstof te halen dan dat er energie werd ingestopt. Met behulp van 192 lasers hebben Amerikaanse wetenschappers wat brandstof bestraald waarna er een reactie volgde met energiewinst. Het uiteindelijke doel is kernfusie-ontbranding, waarbij de reactie spontaan blijft doorgaan. Er wordt geschat dat het nog een 50-tal jaar zal duren voordat kernfusie als energiebron gebruikt kan worden.

Kennislink



## Het ene oor in, het andere uit: ons brein kan geluiden moeilijk onthouden

Soms gaat informatie het ene oor in en het andere oor uit. En dat is niet zo gek, zo blijkt uit nieuw

onderzoek. Wetenschappers hebben ontdekt dat mensen een slecht geheugen hebben als het aankomt op geluiden.

De onderzoekers verzamelden een aantal studenten. De proefpersonen kregen tonen te horen, verschillende tinten rode vierkanten te zien of trillingen te voelen. Tussen elke set tonen, vierkanten en trillingen zat elke keer één tot 32 seconden. Hoe groter het gat tussen de sets was, hoe meer moeite de proefpersonen hadden met het herinneren van wat ze gehoord, gezien of gevoeld hadden. Maar dat effect was zeker het grootst voor de geluiden: proefpersonen begonnen die al vier tot acht seconden nadat ze deze gehoord hadden te vergeten.

Waarschijnlijk is het zwakke geheugen van mensen als het gaat om geluiden al heel oud. De onderzoekers stellen dat ook apen beter in staat zijn om visuele informatie en informatie verkregen door tast te verwerken, dan auditieve informatie. Het suggereert dat deze zwakte zich al ontwikkelde toen de mens zich nog niet van de aap had afgescheiden.

Scientias



# Het leven van Évariste Galois

DOOR PAUL HELMINCK

Er kan van maar weinig wiskundigen gezegd worden dat ze een leven hebben geleid met zoveel intrige en drama als dat van Évariste Galois. Zijn verrichtingen als wiskundige hebben hem uiteindelijk de meeste faam opgeleverd, maar hij leidde daarnaast ook een politiek geëngageerd leven als revolutionair in het tumultueuze Frankrijk van het begin van de 19e eeuw. Helaas is hij op de vroege leeftijd van twintig jaar overleden aan de complicaties die hij overhield aan een duel. De avond voor het duel besloot hij echter om zijn laatste (en belangrijkste) wiskundige bevindingen op te schrijven in een brief aan een van zijn vrienden. Wat men daaruit heeft kunnen destilleren staat nu beter bekend als Galoistheorie. Bij dezen een bescheiden poging om afwis-selend zijn leven en zijn werk kort in kaart te brengen.

Évariste Galois werd geboren op 25 oktober 1811 in een klein dorpje nabij Parijs, genaamd Bourg-la-Reine. Aldaar werd hij tot zijn twaalfde opgevoed door zijn vader en moeder. Zijn vader was een republikein met een openbare afgunst voor de monarchie en zijn moeder was een rechtsgeleerde die haar man bij kon staan bij eventuele perikelen.

Vanaf zijn twaalfde kon hij dan eindelijk zijn thuis-scholing in de praktijk brengen aan het *College de Louis-le-Grande*, een prestigieuze kost-school in Parijs. Daar kon hij voor het eerst proeven van de rebelse politi-eke activiteiten die op dagelijkse basis plaatsvonden. Zo

werden er na een incident met betrekking tot religie en een toast op de koning meer dan honderd studenten van de school gestuurd. Galois bleef die keer echter gespaard.

Desalniettemin ging het de eerste twee jaar erg goed en zijn thuis-scholing leek zo haar vruchten af te werpen. Daarna zette echter de verveling bij Galois in.

Hij scoorde onder de maat op de meeste vakken en moest het jaar overdoen. Verrassend genoeg begon hij dat jaar wel een sterke voorkeur voor wiskunde op te doen. Dit was dan ook het enige vak waarin hij excelleerde. Hij kreeg een kopie van Adrien-Marie Legendres *Éléments de Géométrie* in zijn handen en hij las die schijnbaar als een roman door. Galois kreeg na het lezen van meer teksten steeds meer vertrouwen en hij koos ervoor om het ingangsexamen voor de prestigieuze *l'École Polytechnique* te gaan doen, zonder enige voorbereiding te treffen. Dit examen haalde hij niet

en zelfs na een tweede poging een jaar later werd hij niet toegelaten. Sterker nog, hij werd uiteindelijk naar de *l'École Normale* gestuurd, een school voor leraren.

*“Dit leidde meerdere malen tot verblijf in de plaatselijke gevangenis, de laatste keer zelfs voor negen maanden.”*

Het is gedurende deze tijd dat hij steeds meer begaan werd met de politiek. Uit ontevredenheid over het beleid op zijn school werd hij dan ook lid van de extreem republikeinse partij *La Société des Amis du Peuple*. Dit had dan weer als gevolg dat hij van school werd gestuurd. Hij werd tevens lid van de *Artillerie van de Nationale Garde*, een tak van het leger die sterke antimonarchistische gevoelens koesterde. Dit leidde

meerdere malen tot verblijf in de plaatselijke gevangenis, de laatste keer zelfs voor negen maanden.

Hiervoor heeft hij zich nog wel bezig gehouden met wiskunde. Hij publiceerde namelijk zijn eerste artikel over kettingbreuken en tevens kwam hij met zijn eerste resultaten op het gebied van polynoomvergelijkingen. Deze stuurde hij onder andere naar de *Académie des Sciences*, de plek waar grote figuren als Cauchy, Poisson en Fourier een plek hadden. Deze waren zeker geïnteresseerd, maar Galois werk kwam nogal slordig op hen over, de argumenten waren vaag en onduidelijk en hun antwoord was dan ook om het werk nog een keertje te herzien.

Het is rond deze tijd, dat Galois gevoelens van genegeheid begon te voelen voor een zekere mademoiselle Stéphanie D. Uit de brieven die zij hem heeft gestuurd kunnen we alleen maar opmaken dat dit niet helemaal wederzijds was. Dit heeft een deprimerend effect gehad op Galois. Niet lang hierna werd Galois uitgedaagd voor een duel door een zeker persoon, mogelijkkerwijs vanwege zijn avances naar mademoiselle Stéphanie D.



In een brief aan zijn vrienden de nacht voor het duel schreef hij het volgende:

*“Ik smeeek patriotten en mijn vrienden me niet te verwijten te sterven voor iets anders dan voor mijn vaderland. Als het slachtoffer van een lichtzinnige vrouw zal ik sterven. Het is in een verwerpelijk gevecht dat mijn leven uitgedoofd wordt. Oh! Waarom moet ik sterven voor zo iets triviaals, zo iets afgrijselijks! Mijn excuses voor zij die me gedood hebben, ze zijn van goede aard.”*

De dag erna ging hij het gevecht aan, verloor en nog een dag later stierf hij ten gevolge van een buikvliesontsteking. Echter, de dag voor het gevecht heeft hij ook een brief geschreven aan zijn goede vriend Chevalier. Hierin heeft hij al zijn werk op het gebied van polynoomvergelijkingen kort nog een keer opgeschreven. Hij eindigde als volgt:

*“Tu prieras publiquement Jacobi ou Gauss de donner leur avis, non sur la vérité, mais sur l'importance des théorèmes. Après cela, il y aura, j'espère, des gens qui trouveront leur profit à déchiffrer tout ce gâchis.”*

Vertaald naar het Nederlands staat hier:

*“Je moet Jacobi of Gauss openlijk vragen om hun mening te geven, niet wat betreft de waarheid, maar het belang van de stellingen. Hierna zullen er, hopelijk, mensen zijn die hun voordeel kunnen vinden in het ontcijferen van al die rotzooi.”*

## Galois werk

Évariste Galois is kort gezegd de grondlegger van de groeppentheorie, al heeft deze theorie nu meer toepassingen dan hij zelf voor ogen had. Hijzelf was voornamelijk geïnteresseerd in het oplossen van *polynomievergelijkingen*. Een voorbeeld van één van deze vergelijkingen is het kwadratische geval, namelijk:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

De Babyloniërs (rond 1600 voor Christus) waren waarschijnlijk de eersten die dit soort vergelijkingen konden oplossen. Tegenwoordig wordt de oplossing op de meeste middelbare scholen onderwezen in de vorm van de *abc*-formule:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Deze laat zich eenvoudig bewijzen door 'het kwadraat af te splitsen'. Hoe dan ook ligt er nu een nieuw probleem in het verschiet: stel, we hebben een vergelijking van de vorm

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

ofwel, een *kubische vergelijking*. Wat zijn nu de oplossingen? Ergens in de 16e eeuw vond Niccolo Fontana (ook wel: Tartaglia) een oplossing voor dit probleem. Deze oplossing werd later gepubliceerd door Girolamo Cardano in zijn *Ars Magna*. De *Cardano-formule* luidt als volgt:

$$x = \sqrt[3]{\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{2} + \frac{p^3}{27}}}$$

waarbij  $p = b - \frac{a^2}{3}$  en  $q = c + \frac{2a^3 - 9ab}{27}$ . Een nogal afzichtelijke (en weinig inzichtelijke) formule, al zeg ik het zelf. Desalniettemin was het mogelijk om in het algemeen zogenaamde kubische vergelijkingen op te lossen in termen van radicalen. Dit betekent dat bij het opschrijven van de oplossingen er alleen succesief gebruik gemaakt mag worden van optellen, aftrek-

ken, vermenigvuldigen, delen en het trekken van  $n$ -de machtswortels, waarbij  $n$  een geheel getal is. Welnu, in hetzelfde manuscript heeft Cardano ook de oplossing gegeven voor zogenaamde vierdegraadsvergelijkingen, namelijk vergelijkingen van de vorm:

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

De oplossingen van deze zijn nog afzichtelijker dan de vorige en zodoende wil ik deze de lezer dan ook graag besparen (de geïnteresseerde kan terecht bij de referenties of wikipedia). Men probeerde nu na de 16e eeuw dezelfde soort technieken te gebruiken voor vijfdegraadsvergelijkingen. Dit zijn vergelijkingen van de vorm

$$x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0.$$

Deze pogingen faalden allemaal echter hopeloos. Er rees dan ook het vermoeden dat het überhaupt niet mogelijk was om de oplossingen van deze vergelijkingen uit te drukken in radicalen. Dit vermoeden werd in het begin van de 19e eeuw bewezen door de Noor Niels Henrik Abel. Hij bewees dat het niet mogelijk is om een algemene oplossing van een vijfdegraadsvergelijking te geven in termen van  $n$ -de machtswortels, optellen, vermenigvuldigen en dergelijke. Dit betekent uiteraard niet dat sommige vijfdegraadsvergelijkingen niet op te lossen zijn in termen van wortels. Immers, men kan vergelijkingen nemen zoals

$$x^5 = 1 \quad \text{of} \quad x^5 = 2,$$

welke bijvoorbeeld de oplossingen  $x = 1$  en  $x = \sqrt[5]{2}$  toelaten. Maar wat de stelling van Abel zegt is dat het weliswaar mogelijk is dat er voor elke afzonderlijke vergelijking een formule bestaat maar er bestaat geen algemene formule. Deze stelling van Abel laat echter nog wat te wensen over. Om even wat vragen te noemen die in je op zouden kunnen komen:

- [1] Bestaat er voor elke individuele vijfdegraadsvergelijking wel een oplossing in termen van wortels?
- [2] Zo ja, wat zijn deze dan? Zo nee, hoe weten



we of een bepaalde vergelijking wel is op te lossen in termen van wortels of niet?

- [3] Hoe zit het met de bovenstaande vragen voor zesdegraadsvergelijkingen en in het algemeen  $n$ -de-graadsvergelijkingen?

Het goede nieuws is dat de theorie die Galois heeft opgezet in zijn memoires in staat is om al deze vragen te beantwoorden.

### De Galoisgroep.

Galois voegde aan een polynoomvergelijking een zogenaamde *groep* toe, welke wij tegenwoordig de Galoisgroep van de vergelijking noemen. Dus stel dat we een polynoom  $f(x)$  hebben van de vorm

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n,$$

waarbij we aannemen dat  $f(x)$  geen dubbele nulpunten heeft en dat zijn coëfficiënten  $a_i$  allemaal rationale getallen zijn. Volgens de Hoofdstelling van de Algebra heeft  $f(x)$  dan precies  $n$  nulpunten over de complexe getallen  $\mathbb{C}$ . Deze noemen we  $\alpha_i$ . We kunnen dan de verzameling nulpunten bekijken die bestaat uit  $n$  elementen:  $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ . Het idee van Galois was om permutaties op deze verzameling  $S$  te beschouwen. Deze permutaties bevatten onder andere genoeg informatie om te bepalen of je polynoomvergelijking op te lossen is in termen van radicalen. Laten we eerst naar het geval  $n = 3$  kijken. Dan hebben we dus een polynoom  $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$  met nulpunten  $\alpha_1, \alpha_2$  en  $\alpha_3$ . Op de verzameling

$$S = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\},$$

kunnen we nu permutaties beschouwen. Wat eenvoudige combinatoriek laat dan zien dat er precies  $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$  verschillende permutaties zijn op deze verzameling  $S$ . Een voorbeeld van zo'n permutatie is:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &\rightarrow \alpha_2 \\ \alpha_2 &\rightarrow \alpha_3 \\ \alpha_3 &\rightarrow \alpha_1 \end{aligned}$$

Eén van de belangrijkste inzichten van Galois was dat niet elk van deze permutaties daadwerkelijk iets nuttigs zegt over de vergelijking. De permutaties die we daadwerkelijk willen hebben zijn de zogenaamde lichaamsautomorfismen.

### Ringen en Lichamen.

Om niet aan precisie in te te boeten zal ik hier even kort de taal van ringen en lichamen introduceren. We zullen hier voor het gemak alleen zogenaamde deelringen en deellichamen van de complexe getallen  $\mathbb{C}$  beschouwen. Een deelring van  $\mathbb{C}$  is een verzameling  $R \subseteq \mathbb{C}$  zodanig dat  $1 \in R$  en als  $x, y \in R$ , dan geldt ook dat  $x + y, -x, xy \in R$ . Een deellichaam van  $\mathbb{C}$  is een deelring  $R \subseteq \mathbb{C}$  met de eigenschap dat als  $x \in R \setminus \{0\}$ , dan is er een  $y$  zodanig dat  $xy = 1$ .

- [1] De verzameling van alle breuken,  $\mathbb{Q}$ , is een deellichaam van  $\mathbb{C}$ .
- [2] De verzameling van alle reële getallen,  $\mathbb{R}$ , is een deellichaam van  $\mathbb{C}$ .
- [3] De verzameling  $\mathbb{Q}(i) := \{a + bi : a, b \in \mathbb{Q}\}$  is een deellichaam van  $\mathbb{C}$ .
- [4] De verzameling van alle gehele getallen,  $\mathbb{Z}$ , is een deelring, maar geen deellichaam van  $\mathbb{C}$ .
- [5] Voor een verzameling  $S \subset \mathbb{C}$  kunnen we kijken naar het kleinste lichaam dat  $S$  bevat. Deze noteer ik met  $\mathbb{Q}(S)$ . Bijvoorbeeld voor  $S = \{i\}$  krijgen we het bovenstaande voorbeeld  $\mathbb{Q}(i)$ . Maar we kunnen ook  $S = \{\sqrt[3]{2}\}$  nemen, wat oplevert dat  $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ .

We kunnen nu weer terug naar het polynoom  $f(x)$ . Deze heeft  $n$  verschillende nulpunten  $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ . We kunnen nu kijken naar het deellichaam  $\mathbb{Q}(f(x)) := \mathbb{Q}(S)$ . Dit is het kleinste

deellichaam van  $\mathbb{C}$  dat de wortels van  $f(x)$  bevat. Ter illustratie zal ik nu dit lichaam  $\mathbb{Q}(S)$  beschrijven voor  $f(x) = x^3 - 2$ . Wat zijn nu de nulpunten van  $x^3 - 2$ ? We hebben uiteraard het reële nulpunt  $\sqrt[3]{2}$ , maar volgens de hoofdstelling van de algebra zijn

er nog twee. Hiervoor kijken we naar de nulpunten van  $x^3 - 1$ . Deze heeft in ieder geval als nulpunt 1. De identiteit  $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$  laat zien dat de overige twee nulpunten nu voldoen aan  $x^2 + x + 1 = 0$ . Men kan als wortel bijvoorbeeld kiezen voor  $\omega := e^{2\pi i/3}$ . We hebben dus  $\omega^3 = 1$ , maar  $\omega \neq 1$ . Zodoende ook  $(\omega \sqrt[3]{2})^3 = \omega^3 \sqrt[3]{2^3} = 1 \cdot 2 = 2$ . Dus  $\omega \sqrt[3]{2}$  voldoet ook aan  $f(x) = 0$ . Hetzelfde geldt voor  $\omega^2 \sqrt[3]{2}$ . Dus we hebben  $S = \{\sqrt[3]{2}, \omega \sqrt[3]{2}, \omega^2 \sqrt[3]{2}\}$  en  $\mathbb{Q}(f) = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega \sqrt[3]{2}, \omega^2 \sqrt[3]{2})$ . Een kort moment van reflectie leert ons dat dit laatste lichaam ook te schrijven is als  $\mathbb{Q}(f) = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega)$ .

### Lichaamsautomorfismen

We kunnen nu zeggen wat een lichaamsautomorfisme van een deellichaam  $K \subset \mathbb{C}$  is. Deze lichaamsautomorfismen zullen de Galoisgroep vormen. Welnu, een lichaamsautomorfisme is een afbeelding  $\phi : K \rightarrow K$  zodanig dat

- (1)  $\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y)$
- (2)  $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$
- (3)  $\phi(1) = 1$

en zodanig dat  $\phi$  inverteerbaar is, wat wil zeggen dat er een  $\psi : K \rightarrow K$  is zodanig dat  $\psi \circ \phi = \phi \circ \psi = \text{id}$ . We definiëren nu de Galoisgroep van een polynoom  $f(x)$  als de verzameling van alle lichaamsautomorfismen van het lichaam  $\mathbb{Q}(S)$ , waarbij  $S$  alle wortels zijn van  $f(x)$ . In plaats van te denken aan deze geleerde definitie kan men ook het volgende spelletje spelen om een afbeelding  $\phi : K \rightarrow K$  te maken met de juiste eigenschappen.

- [1] Schrijf het lichaam als  $K = \mathbb{Q}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$
- [2] Pak een  $\beta_i$  en schrijf een vergelijking op waaraan deze voldoet. Dus vind een  $g_i(x)$  (van zo klein mogelijke graad) zodanig dat  $g_i(\beta_i) = 0$ .
- [3] Beschrijf de wortels van deze  $g_i(x)$ .
- [4] Je kan nu  $\beta_i$  sturen naar een andere wortel, zeg  $\gamma_i$ , van  $g_i(x)$ . Dat wil zeggen, je hebt  $\phi(\beta_i) = \gamma_i$ . Je kan hier dus bijvoorbeeld

hebben  $\phi(\beta_i) = \beta_i$ , want  $\beta_i$  is ook een wortel van  $g_i(x)$ .

Om deze aanpak te illustreren gebruiken we ons favoriete voorbeeld  $f = x^3 - 2$  en  $K = \mathbb{Q}(f) = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega)$  waarbij  $\omega^3 = 1$ , maar  $\omega \neq 1$ . Het element  $\beta_1 = \sqrt[3]{2}$  voldoet aan de vergelijking  $(\beta_1)^3 = 2$  dus we moeten  $\beta_1$  sturen naar een van de wortels  $\sqrt[3]{2}, \omega \sqrt[3]{2}, \omega^2 \sqrt[3]{2}$ . Dit levert ons drie mogelijkheden voor afbeeldingen. Verder hebben we dat  $\omega$  voldoet aan  $\omega^2 + \omega + 1 = 0$  en zodoende kunnen we  $\omega$  sturen naar  $\omega$  of  $\omega^2$ . Dit geeft dus twee mogelijkheden. In totaal hebben we zes afbeeldingen die er als volgt uitzien:

$$\begin{aligned} \phi_1 : \sqrt[3]{2} &\rightarrow \sqrt[3]{2} \\ \omega &\rightarrow \omega \\ \phi_2 : \sqrt[3]{2} &\rightarrow \omega \sqrt[3]{2} \\ \omega &\rightarrow \omega \\ \phi_3 : \sqrt[3]{2} &\rightarrow \omega^2 \sqrt[3]{2} \\ \omega &\rightarrow \omega \\ \phi_4 : \sqrt[3]{2} &\rightarrow \sqrt[3]{2} \\ \omega &\rightarrow \omega^2 \\ \phi_5 : \sqrt[3]{2} &\rightarrow \omega \sqrt[3]{2} \\ \omega &\rightarrow \omega^2 \\ \phi_6 : \sqrt[3]{2} &\rightarrow \omega^2 \sqrt[3]{2} \\ \omega &\rightarrow \omega^2 \end{aligned}$$

Dit zijn alle lichaamsautomorfismen van het lichaam  $\mathbb{Q}(x^3 - 2)$ . Dit vormt de zogenaamde Galoisgroep van de vergelijking  $x^3 - 2$ . Ik had eerder gezegd dat de Galoisgroep de wortels van de vergelijking zou permuteren. De wortels waren  $S = \{\sqrt[3]{2}, \omega \sqrt[3]{2}, \omega^2 \sqrt[3]{2}\}$ . Laten we  $\phi_5$  nemen en controleren of deze echt een permutatie induceert. Deze heeft het volgende effect op de wortels:

$$\begin{aligned} \phi_5(\sqrt[3]{2}) &= \omega \sqrt[3]{2} \\ \phi_5(\omega \sqrt[3]{2}) &= \omega^2 \cdot (\omega \sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{2} \\ \phi_5(\omega^2 \sqrt[3]{2}) &= \omega \cdot (\omega \sqrt[3]{2}) = \omega^2 \sqrt[3]{2} \end{aligned}$$

Inderdaad, een permutatie. We zien hier tevens dat de vergelijking  $x^3 - 2 = 0$  elke permutatie van zijn wortels toelaat. Daar staat tegenover een vergelijking

van de vorm  $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ . De identiteit  $x^5 - 1 = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$  laat zien dat voor  $\omega := e^{2\pi i/5}$  de wortels de volgende gedaante aannemen:  $S = \{\omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4\}$ . Volgens het bovenstaande recept voor lichaamsautomorfismen houden we dus alleen de afbeeldingen

$$\omega \rightarrow \omega^i$$

voor  $i = 1, 2, 3, 4$  over. Deze vergelijking van graad 4 heeft dus maar 4 automorfismen in tegenstelling tot de mogelijke  $4! = 24$  permutaties van zijn wortels.

Maar wat doet deze Galoisgroep nou eigenlijk? Laat ik even wat handige feiten over deze groep op een rijtje zetten:

1. De groepsstructuur beschrijft alle mogelijke manieren om je polynoomvergelijking op te lossen. Met groepsstructuur bedoel ik hier dat je een natuurlijke operatie hebt op je Galoisgroep: je kunt namelijk twee automorfismen samenstellen om nog een automorfisme te krijgen. Elke deelverzameling van de Galoisgroep die gesloten is onder deze operatie (een ondergroep) correspondeert met een deellichaam, welke gezien kan worden als een manier om dichter bij de wortels van je vergelijking te kunnen komen.
2. Je kan aan de groep aflezen of de oplossingen van je vergelijking uit te drukken zijn in termen van radicalen (formules bestaande uit wortels en dergelijke). Deze eigenschap van de groep heeft de toepasselijke naam "oplosbaarheid".
3. Er zijn groepen die niet oplosbaar zijn. Een voorbeeld hiervan is de groep van alle permutaties op vijf of meer elementen. Alle vergelijkingen met zulke Galoisgroepen zullen geen oplossingen in termen van wortels

toelaten.

4. De groep is eindig en zodoende is hij in principe uit te rekenen in eindige tijd. Vergelijk dit met de in principe oneindige hoeveelheid mogelijkheden die je hebt om een vergelijking op te lossen. Zodoende beantwoordt de Galoisgroep de vragen die we eerder hadden. Er zijn inderdaad vergelijkingen waarvan de oplossingen niet zijn uit te drukken in termen van radicalen. Degene die wel zo'n uitdrukking toelaten hebben een oplosbare Galoisgroep. Omgekeerd geldt ook dat als een vergelijking een oplosbare Galoisgroep heeft, dan zijn de wortels uit te drukken in termen van radicalen. De toepassingen van Galoistheorie gaan echter veel verder dan alleen het oplossen van polynoomvergelijkingen in termen van radicalen. Het geeft een bewijs van kwadratische reciprociteit, een belangrijke stelling

### *"Komt elke abstracte groep voor als de Galoisgroep van een polynoom over $\mathbb{Q}$ ?"*

in de getaltheorie, het geeft meetkundige informatie in algebraïsche meetkunde en de zogenaamde Galoisrepresentaties zijn tevens de basis

geweest voor het bewijs van Andrew Wiles van de laatste stelling van Fermat. Tevens is het de inspiratie geweest voor Sophus Lie om zijn Lie groepen te creëren. Desalniettemin is een belangrijke vraag in de Galoistheorie nog onbeantwoord: komt elke abstracte groep voor als de Galoisgroep van een polynoom over  $\mathbb{Q}$ ? Deze vraag is ook wel bekend als het "Inverse Galois Probleem" •

#### Referenties

- [1] Ian Stewart, "Galois Theory" derde editie, Uitgever Chapman & Hall.
- [2] Stephen Hawking, "God Created The Integers", Uitgever Running Press.
- [3] Emil Artin, "Galois Theory", Uitgever Dover Publications.
- [4] Peter Stevenhagen, "Algebra 3". Dictaat online beschikbaar op <http://websites.math.leidenuniv.nl/algebra/>.

# Logica in de Praktijk

## *Kijkje in de keuken van een financiële modelbouwtaal*

DOOR J. BLOK, TOPICUS FINAN

De kredietcrisis heeft het belang van accreditatie in het proces van kredietverstrekking alleen maar groter gemaakt. Hiervoor is een grondige analyse vereist van zowel het financiële verleden als de toekomstverwachting van de kredietaanvrager. Topicus Finan voorziet hierin middels economische modellen. Met behulp van een relatief eenvoudige modeltaal zijn onze economen in staat om met beperkte IT-kennis geavanceerde analyses en prognoses te maken.

In deze modeltaal kunnen economen variabelen definiëren door aan een variabele verschillende eigenschappen en formules toe te kennen. De formules worden geformuleerd in een eenvoudige taal waarvan de syntax bestaat uit de gebruikelijke rekenkundige en logische operatoren. Daarnaast kan een formule bestaan uit aanroepen van beschikbaar gestelde functies.

Per variabele kan de econoom formules specificeren voor verschillende eigenschappen. Een voorbeeld hiervan is de eigenschap die uitdrukt of de gebruiker verplicht is een waarde in te vullen voor deze variabele. Hiermee kan bijvoorbeeld gecontroleerd worden of de gebruiker wel voldoende gegevens heeft ingevuld om tot een zinnige analyse, prognose of accreditatie te kunnen komen.

Een dergelijke controle kan in de modeltaal toegevoegd worden door een variabele te definiëren met een formule die voor elke verplichte variabele controleert of die ook ingevuld is. De modeltaal voorziet in een functie om te controleren of een variabele een waarde heeft, namelijk `IsDataAvailable(<variabele>)`.

Neem als voorbeeld het analyseren van de gevolgen van het aangaan van een studielening. In het eenvoudigste geval dient tenminste het maandelijkse leenbedrag en de studieduur bekend te zijn. De volgende formule bepaald of de analyse gedaan kan worden: `StartAnalyse.Formula = IsDataAvailable(LeenBedrag) ^ IsDataAvailable(StudieDuur)`.

Het kan echter zo zijn dat een eigenschap van een variabele dynamisch is. In dat geval volstaat bovenstaande formule niet. Middels een formule kan de 'verplicht' eigenschap (`InputRequired`) van een variabele afhankelijk gemaakt worden van de waarde van een andere formule. `Collegegeldkrediet` bijvoorbeeld, is alleen mogelijk voor hoger onderwijs en niet voor middelbaar beroepsonderwijs. Hiervoor dient ons model uitgebreid te worden met de variabele `HogerOnderwijs` en `CollegeGeldKrediet`. De laatste is verplicht als de eerste de waarde 'true' heeft: `CollegeGeldKrediet.InputRequired = HogerOnderwijs`. De totale formule wordt dan:

```
StartAnalyse.Formula = IsDataAvailable(LeenBedrag)
^ IsDataAvailable(StudieDuur) ^
IsDataAvailable(HogerOnderwijs) ^ (IsInputRequired(CollegeGeldKrediet) -> IsDataAvailable(CollegeGeldKrediet)).
```

*“Juist de huidige financiële crisis vraagt om goede software.”*

De nogal beperkte uitdrukkingsmogelijkheden van de modeltaal levert voor deze functionaliteit nogal omslachtige formules op. Bovendien zijn deze formules moeilijk te onderhouden en is dit onderhoud nogal foutgevoelig. De vraag is hoe de modeltaal - die bewust een eenvoudige semantiek heeft - verrijkt kan worden met een elegantere oplossing voor deze situaties zonder de taal uit te breiden met o.a. loop constructies

zoals gebruikelijk in een iteratieve programmeertaal. Analyse van de uitdrukkingmogelijkheden van de modeltaal met behulp van logica levert mogelijkere wijzen aanwijzingen op voor een betere oplossing.

## Logische Analyse

Predicatenlogica maakt een diepgaande analyse van de formule mogelijk door het juiste domein te kiezen. Het domein van een uitdrukking in predicatenlogica bestaat uit de verzameling objecten waarvan geprediceerd wordt. In ons geval ligt het voor de hand om het domein te laten bestaan uit alle variabelen die in een bepaald model gedefinieerd zijn. Voor ons voorbeeld definiëren we de objecten in het domein als  $a = \text{LeenBedrag}$ ,  $b = \text{StudieDuur}$ ,  $c = \text{HogerOnderwijs}$ ,  $d = \text{CollegeGeldKrediet}$ . Vervolgens definiëren we de predicaten  $\vee$  en  $\wedge$  die respectievelijk de functies  $\text{IsInputRequired}$  en  $\text{IsDataAvailable}$  representeren. In predicatenlogica ziet de controleformule ( $\text{StartAnalyse. Formula}$ ) er dan als volgt uit:  $\wedge a \wedge \wedge b \wedge \wedge c \wedge (\vee c \rightarrow \wedge d)$ .

Met behulp van de kwantoren die predicatenlogica ons ter beschikking stelt, is het nu mogelijk om deze controle in een meer generieke vorm te formuleren:  $\forall x (\forall x \rightarrow \wedge x)$ . Deze uitdrukking levert altijd de juiste uitkomst op voor de controleformule, ongeacht of de 'verplicht' eigenschap van een variabele dynamisch is of niet.

Terug naar de modeltaal. Een oplossing voor ons probleem zou een equivalent van kwantificatie kunnen zijn. In zijn meest eenvoudige vorm ziet een dergelijk equivalent in de modeltaal er als volgt uit:  $\text{ForAll}(\text{IsInputRequired} \rightarrow \text{IsDataAvailable})$ . De functie  $\text{ForAll}$  levert alleen 'true' op als de expressie  $\text{IsInputRequired} \rightarrow \text{IsDataAvailable}$  voor elke variabele 'true' oplevert. Hiermee is het echter niet mogelijk om kwantoren te nesten, aangezien niet aangegeven kan worden dat de expressie aan een bepaalde kwantificatie variabele is gebonden. Analoog aan predicatenlogica kan in de modeltaal daarom een kwantificatie variabele opgegeven worden:  $\text{ForAll}(X, \text{IsInputRequired}(X) \rightarrow \text{IsDataAvailable}(X))$ .

Vergeleken met een taal zonder kwantoren, is het model veel gemakkelijker te lezen en te onderhouden. Toevoeging van een verplichte variabele vereist niet langer aanpassing van de formule.

## Toekomst

Niet alleen een slimme meid, maar ook een slimme oplossing is op haar toekomst voorbereid. De modeltaal is zo ontworpen dat alle variabelen in een hiërarchie staan. Een kleine modificatie zorgt er voor dat op eenvoudige wijze de controleformule alleen van toepassing is op een stukje van de variabelenboom:  $\text{ForAll}(X, \text{SelectDescendants}(\langle \text{Variabele} \rangle), \langle \text{Expression} \rangle)$ .

Een goede theoretische achtergrond blijkt uitermate behulpzaam in de modderige praktijk. Juist de huidige financiële crisis vraagt om software van zodanige complexiteit dat alleen een hoog abstractieniveau leidt tot software engineering van voldoende kwaliteit •

## Contactgegevens

J. Blok MA, Topicus Finan,  
johan.blok@finan.nl



# Van de Extern

DOOR JAAP EISING

Tsja, daar zit je dan, twee dagen na de deadline. Ik werd gevraagd om een stukje te schrijven voor de Perio\*diek, ‘van de Extern’ over mezelf. Omdat ik het idee heb dat mensen mij al wel een beetje kennen, heb ik het liever over het bestuur en dan met name: waarom jij bestuur (of iets anders) moet doen.

**H**et enige (nuttige) advies dat ik aan mijn eigen KEI-kindjes heb meegegeven is: “ga dingen doen!” Je hebt tot je 67e (of 75e als het zo doorgaat) nooit meer zoveel vrije tijd als je nu hebt, waarom gebruik je die tijd niet nuttig?

Er zijn heel wat studenten die naast hun studie één of twee avondjes wat doen en af en toe wat werken. Hoeveel uren heb jij in je WoW-account staan? Hoeveel uren series heb je gezien? Willekeurig gefacebookt? Ik heb vroeger meer dan 10.000 uren op Guild Wars doorgebracht. Als ik die uren had besteed aan bijvoorbeeld pianospelen, had ik nu concertpianist kunnen zijn. Uitgaande van 7 uur slaap per nacht heb je 119 uur in de week om in te vullen. Qua studiecontacturen is twintig héél ruim gerekend, dus ga uit van 100 vrij in te delen uren. Bedenk maar eens wat je daar allemaal mee kan.

Dan bedoel ik zeker niet dat alles maar prestatiegericht moet zijn, alleen maar studeren en werken kan niemand aan. Een paar voorbeelden van ‘dingen’ zijn dan ook gewoon sport-, muziek-, studie- of zuipverenigingen: zet 5 uur van je tijd per week in om mensen te leren kennen met dezelfde interesses als jij: een win win situatie.

Bang zijn voor studievertraging is ook een veel gehoord excuus. “Dan wordt je nooit aangenomen, dan lijkt je een luie student.” Naast het feit dat je als bèta sowieso niet bang hoeft te zijn om werkloos te worden, is studievertraging helemaal niet erg, als je maar een excuus hebt. Een maand geleden zag ik een enquête afgenomen onder recruiters, waaruit bleek dat cijfers en bijbaantjes minder gewaardeerd worden dan nevenactiviteiten.



Jaap Eising,  
commissaris Extern der FMF.

Van commissies en besturen leer je de twee belangrijkste vaardigheden voor elk bedrijf: samenwerken en organiseren. Overigens: een bijkomend voordeel van studievertraging is dat je per definitie langer student bent en dus pas later aan het werk hoeft.

Naast al dit belerende gebral van mijn kant is het doen van bestuur ook gewoon supermooi. Er is maar weinig wat zoveel voldoening geeft als met z'n vijven aan het roer van de vereniging staan en écht iets gedaan krijgen. Verder maakt contact met mensen (vergaderen, onderhandelen, borrels, hangen in de NSFW, whatever) alles goed •

# Siteswaps

## *Jongleren met getallen*

DOOR WOUTER VAN DOORN EN ANNEROOS EVERTS

Je hebt vast wel eens iemand zien jongleren. Misschien een clown in een circus die een mes onder zijn been door gooit. Misschien een straatartiest die kegels achter zijn rug omhoog gooit. Of misschien een medestudent die in de pauze onnavolgbare trucs doet met drie ballen. Er zijn (letterlijk) oneindig veel verschillende jongleertrucs te verzinnen en in dit artikel gaan we het hebben over de meest elementaire soort jongleertruc: siteswaps.

**H**et enige wat er bij siteswaps gebeurt, is dat ballen<sup>1</sup> naar verschillende hoogtes worden gegooid. Geen ingewikkelde hand- of lichaamsbewegingen, slechts de hoogte (en het feit of een bal gegooid uit de ene hand uiteindelijk in dezelfde of in de andere hand zal landen) is variabel. Niet alleen kunnen siteswaps prachtige patronen in de lucht opleveren, de mathematische theorie die erachter schuilgaat, is bij tijd en wijle minstens zo elegant.

### Voorbeeld van een siteswap

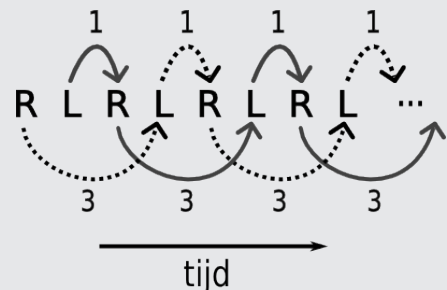
Probeer je in te beelden dat je twee jongleerballen krijgt aangereikt, in elke hand één; een rode in je rechterhand en een blauwe in je linkerhand. Of, mocht je toevallig jongleerbare objecten in de buurt hebben, dan kun je dit gedachtenexperiment daadwerkelijk uitvoeren. Neem daarnaast aan dat je nog niet kunt jongleren (een aanname die in de praktijk niet altijd, maar toch opvallend vaak correct blijkt). Ben je zover?

*“Ben je zover?”*

Oké, dan krijg je nu de opdracht om ermee te gaan jongleren. Wat nu vrijwel altijd gebeurt, is het volgende: je gooit, met je rechterhand (we nemen voor het gemak aan dat dit je dominante hand is), de rode bal schuin omhoog en omdat je rechterhand nu vrij is, geef je de blauwe bal uit je linkerhand door naar je rechterhand, waarna je de rode bal in je linkerhand vangt. Vervolgens herhaalt dit proces of patroon zich. Hoewel dit precies het patroon is dat een beginnende jongleur juist moet afleren, om met ‘echt’ jongleren te beginnen, is het wel degelijk een jongleertruc te noemen.<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Opmerking van de schrijver (Wouter van Doorn): Laat ik maar direct uit de kast komen; ik ben een baljongleur. Hoewel kegels, zwaarden of cirkelzagen er soms prachtig uit kunnen zien, gaat er toch niets boven de mathematische elegantie van een punt dat sierlijk door de ruimte zweeft. Overal in dit artikel waar het woord ‘bal’ wordt gebruikt, mag je zelf je favoriete jongleerobject substitueren.

<sup>2</sup> Als je wel ‘echt’ wilt leren jongleren (en dat wordt aangeraden!): er zijn voldoende tutorials te vinden op YouTube.



**FIGUUR 1**

Weergave van de siteswap 31.

We hebben er dan ook een naam voor: een ‘tweebalshower’ of, in siteswapnotatie, 31 (lees: drie één). Een grafische weergave van dit patroon is te zien in figuur 1, waarin R en L voor respectievelijk de rechter- en linkerhand staan en de worpen met pijltjes worden weergegeven. Aan de hand van dit voorbeeldje zullen we het concept van siteswaps behandelen.

### Rijtje getallen

Een siteswap is een (eindig) rijtje niet-negatieve gehele getallen en elk getal in het rijtje geeft een worp aan. Hoe groter het getal, des te hoger, in praktijk, de worp. In ons voorbeeld, 31, gaat de eerste worp (de 3) hoger dan de tweede worp (de 1) en in praktijk komt het er zelfs op neer dat de 1 niet eens meer wordt gegooid, maar gewoon wordt doorgegeven aan de andere hand. Als we het laatste getal van het rijtje gegooid hebben, in ons voorbeeld de 1, beginnen we weer bij het eerste getal van het rijtje. Zo herhaalt het patroon zich en hebben we in feite de oneindige periodieke rij 31313131... met periode 2, zie figuur 1.

Hoewel hiervoor werd beweerd dat de grootte van een getal de hoogte van de worp bepaalt (en in praktijk komt het daar inderdaad op neer), wordt uit figuur 1 duidelijk waar de getallen 3 en 1 precies op slaan; een getal in een siteswap geeft het aantal stappen aan dat een bal vooruit in de tijd moet worden gegooid, alvorens het opnieuw gegooid moet worden. Dit noemt men het aantal ‘beats’. Dus een 1 geeft aan dat die bal op de volgende beat direct weer gegooid wordt. Vandaar dat je ziet dat een 1 in praktijk niet wordt gegooid, maar wordt doorgegeven, omdat diezelfde bal direct daarna weer gegooid moet worden.

Bij (standaard) siteswaps nemen we aan dat de rechter- en linkerhand elkaar steeds afwisselen. Hieruit volgt dat even getallen corresponderen met worpen die naar dezelfde hand toe gaan, want een even aantal beats later is dezelfde hand weer aan de beurt. Oneven getallen staan voor worpen die naar de andere hand gaan. Verder nemen we aan dat er nooit op dezelfde beat meerdere ballen worden gegooid of gevangen.

### Formele definitie van een siteswap

Met al deze kennis zijn we eindelijk klaar voor de formele definitie van een siteswap. Voordat we die geven, kijken we eerst nog even naar figuur 1. Omdat hier een siteswap wordt weergegeven die zich elke 2 beats herhaalt, is het natuurlijk om deze modulo 2 te bekijken. Op de oneven beats wordt een 3 gegooid, die dus op een even beat landen, en op de even beats wordt een 1 gegooid, die dus op een oneven beat landen. Er landen dus nooit meerdere ballen op hetzelfde moment. Dit motiveert de formele definitie van een siteswap:

*Een siteswap van periode  $p$  is een rij van  $p$  getallen,  $a_1, a_2, \dots, a_p$ , met de eigenschap dat  $i + a_i \bmod p$  uniek is. Dat wil zeggen  $i + a_i \equiv j + a_j \bmod p$  impliceert  $i = j$ .*

Met deze definitie kun je nagaan dat bijvoorbeeld 97531, 123 en 666660 alle drie siteswaps zijn. Zie figuur 2 voor een foto van Wouter waarop hij 97531 gooit, een truc waarbij de ballen landen in de omge-



FIGUUR 2 Wouter gooit 97531.



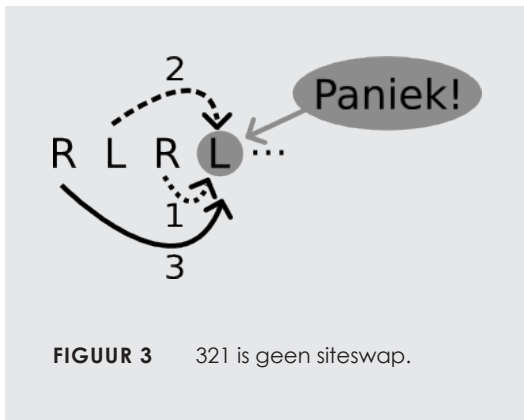
keerde volgorde van waarin ze worden gegooid. Een schematische weergave van de siteswap 97531 is te zien in figuur 4.

Het bijzondere aan 666660 is dat er een 0 in zit. Het is logisch dat een siteswap geen negatieve getallen kan bevatten, want dat zou betekenen dat je een bal terug in de tijd gooit. Maar wat is een 0 dan precies? Een bal die je naar het heden gooit? Nee, een 0 betekent 'niks', je gooit even niets. Oftewel, je hand is leeg voor een beat.

### Eigenschappen van siteswaps

Het is nuttig om in te zien wanneer een rij getallen géén siteswap vormt. Zo is 321 bijvoorbeeld geen siteswap, omdat de 3, de 2 en de 1 allemaal op hetzelfde moment aan zouden komen, zie figuur 3. Om dezelfde reden (2 of meer ballen die op hetzelfde moment neerkomen) kun je inzien dat 124 en 896 geen siteswaps kunnen zijn. Vergeet hierbij niet dat 124, als het siteswap zou zijn, eigenlijk voor 124124... had gestaan. Maar er is nog een reden waarom rijtjes als 124 en 896 onmogelijk siteswaps kunnen zijn en die wordt gegeven door de eerste stelling die we gaan behandelen:

**Stelling 1:** *Het gemiddelde van de getallen in een siteswap is een geheel getal.*



Of, in andere woorden, de som van de getallen in een siteswap is deelbaar door  $p$ , de periode. Let wel, aangezien het gemiddelde van 321 ook geheel is  $(3 + 2 + 1)/3 = 6/3 = 2$ , maar 321 geen siteswap is, zien we dat deze noodzakelijke voorwaarde niet voldoende is.

Met behulp van de definitie is de stelling niet lastig te bewijzen. Zeggen dat  $a_i + i$  uniek is modulo  $p$ , is namelijk niets anders dan zeggen dat de verzameling van  $\{(a_i + i) \bmod p\}_{1 \leq i \leq p}$  gelijk is aan de (ongeordeerde) verzameling  $\{1, 2, \dots, p\}$ . Dus de som  $(a_1 + 1) + (a_2 + 2) + \dots + (a_p + p)$  moet, modulo  $p$ , gelijk zijn aan de som  $1 + 2 + \dots + p$ .

Trekken we deze laatste som van beide zijden af, dan zien we dat de som  $a_1 + a_2 + \dots + a_p$  gelijk moet zijn aan  $0 \bmod p$  en dus deelbaar is door  $p$ .

Passen we deze stelling toe op het voorbeeld 31, dan concluderen we dat het gemiddelde van 3 en 1 geheel moet zijn. En, gelukkig,  $(3+1)/2 = 2$  is geheel. Maar deze 2, de waarde voor het gemiddelde, heeft ook een fysieke betekenis: het is het aantal ballen dat nodig is om de siteswap te kunnen gooien! Dit blijkt altijd op te gaan. Het bewijs voor deze stelling is iets ingewikkelder, maar omdat het de oorsprong van de term 'siteswap' zo mooi uitlegt, is het toch leuk dit te behandelen.

**Stelling 2:** *Het gemiddelde van een siteswap geeft aan met hoeveel objecten de siteswap gegooid moet worden.*

Laten we eerst naar constante siteswaps kijken, bijvoorbeeld 555. Voor de eerste, tweede, derde, vierde en vijfde worp hebben we 5 verschillende ballen nodig, want de eerste worp wordt pas op de zesde beat (5 beats na beat 1) opnieuw gegooid. We hebben dus minstens 5 ballen nodig. Daarnaast is het ook logisch dat 5 ballen voldoende is, want na beat 5 gooien we opnieuw de bal die we 5 beats eerder ook al gegooid hebben. Voor constante siteswaps is onze stelling dus waar.

Voor niet-constante siteswaps kunnen we de stelling bewijzen door ze stap voor stap te transformeren naar

een constante siteswap. Tijdens elke stap blijft zowel het gemiddelde als het aantal benodigde ballen gelijk, waar onze stelling vervolgens uit volgt. En we gaan siteswaps transformeren door... sites te swappen!

Laten we beginnen met een voorbeeldje. Stel dat we op de huidige beat een 7 willen gooien en op de volgende beat een 4. Dat betekent dat de eerste bal over 7 beats opnieuw wordt gegooid en de tweede bal is over  $1 + 4 = 5$  beats weer aan de beurt. Wat we in plaats daarvan zouden kunnen doen, is zorgen dat juist de tweede bal over 7 beats aan de beurt is en de eerste bal over 5. Dat betekent dat we niet 74 moeten gooien, maar 56. Want dan zou inderdaad de eerste bal over 5 beats landen en de tweede bal over  $1 + 6 = 7$ .

Dus, wat we in feite gedaan hebben, is dat we de 7 en 4 van plaats hebben laten wisselen. Oftewel, we hebben hun 'sites gewapt'!

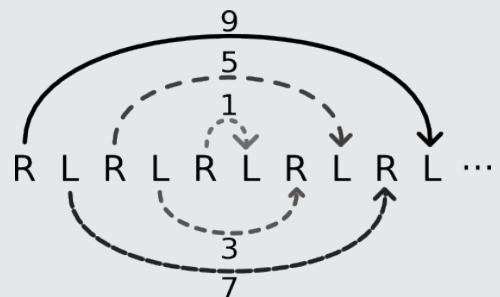
Deze methode, het vervangen van twee opeenvolgende getallen  $xy$  door  $(y+1)(x-1)$ , is toepasbaar op elke twee opeenvolgende getallen in een siteswap, zolang het eerste getal van het paar maar groter is dan 0. Het laatste en het eerste getal in de siteswap worden hierbij ook als opeenvolgend gezien, want, onthoud, een (eindige) siteswap staat eigenlijk voor een oneindige, periodieke rij. Het resultaat van deze transformatie is altijd weer een nieuwe, geldige siteswap. Bovendien, als we deze transformatie herhaaldelijk toepassen op paren opeenvolgende getallen waarvan het eerste getal het grootste getal is dat voorkomt in de siteswap, dan verlagen we hierbij het grootste voorkomende getal (of het aantal grootste getallen). Hierbij gebruiken we dat  $x(x-1)$  niet voorkomt in een geldige siteswap. Daarnaast blijft zowel het aantal benodigde ballen als het gemiddelde van de siteswap in elke stap natuurlijk gelijk. Als we dit proces maar vaak genoeg herhalen, moeten we uiteindelijk wel uitkomen op een constante siteswap en is onze stelling bewezen.

### Tenslotte

Vanwege gebrek aan tijd en ruimte, moeten wij hier helaas ons eerste kijkje in de wonderde wereld van de

siteswaptheorie staken. Al valt er nog meer dan genoeg te vertellen! Zo is er bijvoorbeeld speciale notatie voor siteswaps waarbij links en rechts niet alterneren, maar synchroon gooien. Ook is er siteswapnotatie voor zogeheten multiplextrucs; trucs waarbij men gelijktijdig meerdere ballen uit dezelfde hand gooit. En voor wie van overgooien houdt of goed is met zijn voeten, er zijn zelfs manieren om te siteswappen met meer dan twee handen! Daarnaast zijn er nog vele prachtige wiskundige stellingen over siteswaps te bewijzen. Bijvoorbeeld over het aantal siteswaps bij, laten we zeggen, een gegeven periode en een gegeven aantal ballen. Ook is er een mooie, gedeeltelijke omkering van de stelling dat het gemiddelde van een siteswap geheel moet zijn: elke rij getallen met een geheel gemiddelde, kan gepermuteerd worden tot een geldige siteswap. En er is nog veel, veel meer •

*“En er is nog veel,  
veel meer!”*



**FIGUUR 4** In de siteswap 97531 wisselen de 5 ballen van volgorde.

# Ons Jonge Heelal

## *Kwantum-Zwarte Gat en Zwarte Sterren*

DOOR MARCO SPAANS

Ons heelal ontstond met de oerknal, een singulariteit die zichzelf ontrafelde middels een fase waarin de vier fundamentele krachten in de natuur (zwaartekracht, elektromagnetisme, zwakke en sterke kernkracht) geünificeerd waren. Deze planckfase duurde ongeveer  $10^{-43}$  s. Hierop volgde een periode van zeer snelle uitdijing van ons heelal, inflatie genaamd, gedurende welke ons universum exponentieel in grootte toenam met ongeveer een factor  $10^{24}$ . Ons universum was toen ongeveer  $10^{-36}$  s oud. Middels adiabatische expansie (passend bij een gesloten systeem) koelde het heelal af en binnen een milliseconde waren er quarks, leptonen en een overdaad aan fotonen als gevolg van een kleine onbalans in materie en antimaterie.

**E**lementen als waterstof en helium werden gevormd middels nucleosynthese in de eerste drie minuten. In de paar honderdduizend jaar daarna zijn atoomkernen, elektronen en straling in evenwicht met elkaar in de vorm van een plasma. Gedurende deze fase werd de kosmische achtergrondstraling gevormd, die wij vandaag de dag nog steeds kunnen waarnemen. Van vierhonderdduizend tot honderd miljoen jaar na de oerknal bestond het heelal vooral uit neutraal atomaire waterstof, zonder sterren. Deze periode heet de donkere tijden. De eerste sterren waren er na honderd miljoen jaar en het heelal is vervolgens miljarden jaren bezig geweest met het vormen van sterrenstelsels. De sterren die wij vandaag de dag aan de hemel zien staan, zijn daar dus niet altijd geweest.

Zwaartekracht is de belangrijkste kracht in de evolutie van ons heelal, dat nu veertien miljard jaar bestaat. Onlosmakelijk verbonden met gravitationele ineenstorting zijn zwarte gaten. Er zijn naar schatting  $10^{19}$  zwarte gaten van één tot tien zonnemassa's, stellaire zwarte gaten genaamd. Daarnaast kunnen er kleine kwantum-zwarte gaten bestaan met massa's van  $10^5$  g (de planckmassa) tot meer dan  $10^{15}$  g. Bijna ieder sterrenstelsel bevat bovendien een superzwaar zwart gat in zijn kern, van  $10^5$  tot wel  $10^{10}$  maal de massa

van de zon. Deze monsters ontstonden minder dan negenhonderd miljoen jaar na de oerknal en stralen enorm. De meest talrijke manifestaties van gravitatie zijn sterren en zwarte gaten. Ons waarneembare universum herbergt ongeveer  $10^{22}$  sterren (verdeeld over  $10^{11}$  sterrenstelsels). Maar hoe ontstaan deze zwarte gaten en sterren?

### **Ineenstorting door zwaartekracht: verschillende uitkomsten**

Een graviterend systeem is stabiel als de gravitationele druk uitgeoefend door de materie gecompenseerd wordt door de kinetische energie van deeltjes en/of de impuls van fotonen. Dit suggereert een instabiliteit als de interne druk van een object niet voldoende is om zijn gewicht te dragen. Een criterium voor instabiliteit is de jeansmassa,

$$M_J = \left(\frac{T}{10}\right)^{3/2} (\rho \cdot 10^{20})^{-1/2} M_{\odot}$$

met de zonnemassa  $M_{\odot} = 2 \cdot 10^{33}$  g, voor gastemperatuur  $T$  in kelvin (K) en massadichtheid  $\rho$  in  $\text{g cm}^{-3}$ . Een nagenoeg homogeen medium, met kleine verstoringen zoals die zich voordoen na inflatie, stort derhalve ineen tot fragmenten met massa  $M_J$ . Tij-

dens contractie neemt de dichtheid toe. Dus bij een constante temperatuur zal  $M_j$  steeds verder afnemen en kunnen objecten veel lichter dan een zonnemassa gevormd worden. De temperatuur zal juist toenemen als het gas de vrijkomende gravitationele potentiële energie slechts gedeeltelijk kan wegstralen. Zo kan een ster ontstaan die vele miljoenen jaren straalt middels kernfusie. Voor een gaswolk met een deeltjesdichtheid van  $10^{-19} \text{ g cm}^{-3}$ , een typische begintoestand van honderd- tot vijfhonderdmiljoen jaar na de oerknal, duurt het honderdduizend jaar om ineen te storten tot een ster.

Ineenstorting kan ook singulier zijn, dat wil zeggen er ontstaat een zwart gat zonder de tussenkomst van een ster. Deze zwarte gaten heten monolithisch, omdat ze in één keer worden gevormd. Ze ontstaan als de ineenstorting min of meer adiabatisch is, dus zonder uitwisseling van (stralings-)energie met de omgeving. De jeansmassa blijft dan constant, ook al neemt de dichtheid toe. Er is nauwelijks sprake van fragmentatie, terwijl  $M_j$  in het jonge heelal  $10^3 M_{\odot}$  tot  $10^5 M_{\odot}$  kan zijn, omdat de gastemperatuur hoger is dan  $10^4 \text{ K}$ . Zoveel massa kan niet gedragen worden door de hete kern van een ster. De gaswolk stort ineen totdat ruimte en tijd in zichzelf gekromd worden middels het sterke gravitatieveld. Volgens de ideeën van Einstein is de vorm (de geometrie) van vierdimensionale ruimtetijd een uiting van wat wij ervaren als zwaartekracht. Dankzij deze kromming van de ruimtetijd heeft een zwart gat een waarnemingshorizon die communicatie tussen zijn inwendige en de rest van het universum verbindt volgens de causale principes van de algemene relativiteitstheorie. De straal van deze horizon is  $R_{zg} = 3 (M_{zg}/M_{\odot}) \text{ km}$ .

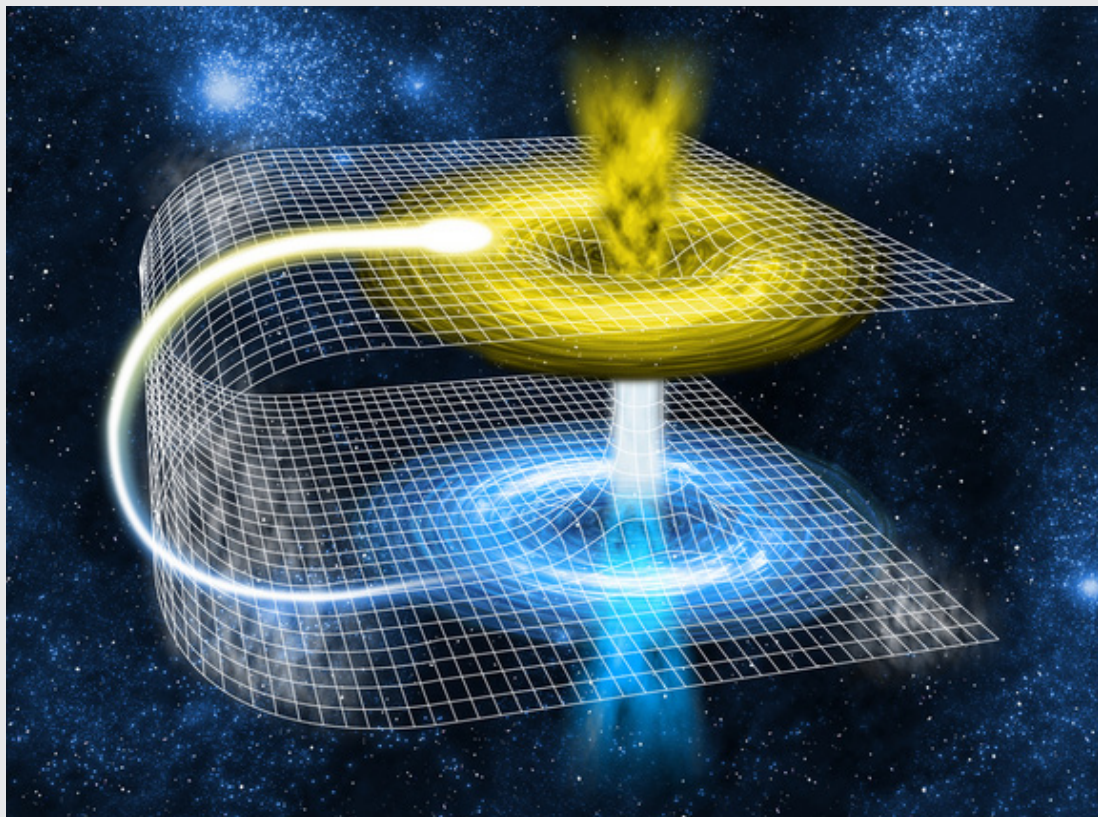
Om de oorsprong van zwarte gaten vandaag de dag te begrijpen, is het noodzakelijk om ook aan vroegere tijden te denken. In de allerjongste fases van het heelal, minder dan  $10^{-36} \text{ s}$  na de oerknal, tijdens de planck- en inflatiefase, zijn ook zwarte gaten gevormd. Deze kleine zwarte gaten zijn in eerste instantie heel licht, minder dan  $10^{-3} \text{ g}$ , omdat de dichtheid enorm hoog is vlak na de oerknal. Dit verlaagt de jeansmassa meer dan de temperatuur haar doet stijgen. Zulke kwan-

tum-zwarte gaten kunnen groeien tot meer dan  $10^{15} \text{ g}$  in de eerste uren na de oerknal.

## Mini- versus maxi-zwarte gaten

Het is belangrijk om de aard van mini- (kwantum-) en maxi- (stellaire en monolithische) zwarte gaten te beschouwen. Ieder zwart gat heeft een temperatuur  $T_{zg} = 10^{-8} (M_{\odot}/M_{zg}) \text{ K}$ , omdat kwantumeffecten een zwart gat in staat stellen te stralen. De waarnemingshorizon lekt dus en een zwart gat kan zelfs verdampen, middels zogeheten hawkingstraling. Een zwart gat leeft ongeveer  $t_{zg} = 10^{56} (M_{zg}/M_{\odot})^3$  miljard jaar. Een zwart gat van  $10^{15} \text{ g}$  leeft ongeveer zolang als het heelal nu oud is: veertien miljard jaar. Verdamping vindt zijn oorsprong in de onzekerheid op kleine schaal van materie en licht. De locatie en impuls van alle deeltjes is onzeker (het heisenbergprincipe), en dit is een uiting van het fundamentele karakter van kwantumruimtetijd. De kwantumruimtetijd bestaat uit vele verschillende paden die elk deeltje simultaan volgt wanneer het van A naar B reist. Hierdoor gedraagt materie en licht zich ook als een golf, omdat de paden ruimtelijk en temporeel van elkaar gescheiden zijn, wat resulteert in kwantumsuperpositie (een beetje overal zijn). Ofschoon de kans klein is, betekent dit dat deeltjes als golven heen en weer door een waarnemingshorizon kunnen reizen en dat een zwart gat geabsorbeerde energie weer uitstraalt. Kwantumruimtetijd staat dus toe dat een zwart gat zich ook gedraagt als een wormgat, een tunnel zoals afgebeeld in figuur 1.

De oorsprong van zwarte gaten en wormgaten ligt in de algemene relativiteitstheorie. Deze zeer succesvolle theorie van zwaartekracht is gebaseerd op geometrie, de vorm van ruimtetijd. De topologie van ruimtetijd, dus hoe verschillende punten A en B met elkaar verbonden zijn middels paden, blijft hierbij onbepaald. Dit is hetzelfde als de constatering dat de algemene relativiteitstheorie een lokale geometrische theorie is zonder globale topologische informatie. Zowel een zwart gat als een wormgat zijn dus goede oplossingen van Einsteins vergelijkingen. Lokaal zijn de oplossingen hetzelfde, maar een wormgat kan verschillende



**FIGUUR 1** Een zwart gat kan zich gedragen als een wormgat, met een ingang en uitgang die verschillende ruimtelijke gebieden en/of tijdstippen verbindt (credit: Edobric at Shutterstock).

gebieden en/of verschillende tijdstippen via topologische identificatie met elkaar verbinden. Figuur 1 toont topologische identificatie middels een pad dat binnendoor via het wormgat gaat en een pad dat buitenom loopt en dus niet een waarnemingshorizon doorkruist. Deze twee paden kunnen niet op elkaar afgebeeld worden via een continue vervorming van de ruimte-tijd en zijn daarom topologisch verschillend.

Niet alleen materie en licht zijn kwantumonbepaald. Ook de ruimtetijd zelf ondergaat kwantumfluctuaties. Wanneer je ruimtetijd beschouwt op de planckschaal van  $10^{-33}$  cm, kom je naast allerlei wilde geometrische vormen ook topologische fluctuaties tegen in de

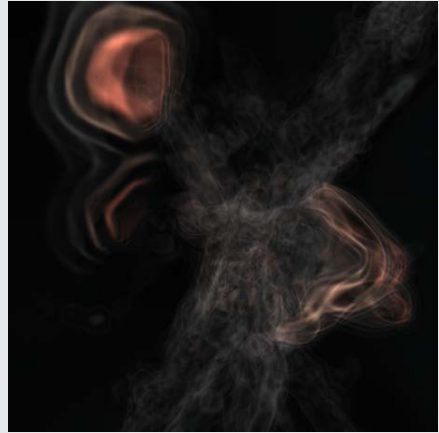
vorm van kwantumwormgaten. Dit is een gevolg van het feit dat Einsteins zwaartekracht niet invariant is onder veranderingen van schaal (zogenoeten conforme transformaties). Deze allerkleinste wormgaten hebben een massa van  $10^{-5}$  g (met  $R_{zg} = 10^{-33}$  cm en  $T_{zg} = 10^{30}$  K) en verdampen in een tijd van ongeveer  $10^{-43}$  s (de plancktijd). Kwantum-zwarte gaten zijn dus erg tijdelijk, terwijl stellaire en monolithische zwarte gaten van vele kilometers nagenoeg eeuwige objecten zijn. Op de planckschaal verwacht je een min of meer stabiele situatie waarbij miniwormgaten iedere plancktijd worden gecreëerd en net zo snel weer verdampen. Dit kan bewerkstelligd worden als miniwormgaten worden geïnduceerd door grote zwarte gaten. Dit

proces is vergelijkbaar met de gestimuleerde emissie van licht, waarbij een foton de aangeslagen toestand van een atoom doet vervallen en een tweede foton induceert (het laserprincipe). Idem dito dwingt de aanwezigheid van een macroscopisch zwart gat een aangeslagen toestand met kwantumwormgaten in het (virtuele) planckse vacuüm tot het produceren van een mini zwart gat dat vervolgens verdampt. Omdat kwantumwormgaten de ruimte oprekken, en er tegenwoordig veel meer grote zwarte gaten zijn dan in het jonge heelal, is dit inductieproces een mogelijke oorzaak voor de donkere energie die ons heelal nu versneld doet uitdijen.

Grote zwarte gaten zijn heel goed in staat om materie aan te trekken en zo verder te groeien in massa. Deze materie stroomt naar het zwarte gat en de bijbehorende wrijving verhit het gas tot meer dan  $10^6$  K. Bij deze temperatuur straalt gas heel helder in het ultraviolet- en röntgenbereik voordat het wordt opgeslokt door de waarnemingshorizon. Het is deze wrijvingswarmte die zorgt dat ook grote zwarte gaten stralen, zoals in actieve galactische kernen. Hierbij kan ongeveer 50% van alle geabsorbeerde massa  $m$  omgezet worden in energie  $E_g$ , volgens de beroemde formule  $E = mc^2$  (met  $c \approx 300.000$  km/s de lichtsnelheid).

Door  $E_g$  te delen door  $mc^2$  krijgen we de efficiëntie  $\epsilon$  waarmee rustmassa wordt omgezet in energie, wanneer de kinetische energie van materie wordt gedisipeerd als straling bij een oppervlak met straal  $R$ . Dit leidt tot  $\epsilon = R_s/(2R)$  voor de schwarzschildstraal  $R_s = R_{zg} = 2GM/c^2$ , die het meest compacte object definieert dat de algemene relativiteitstheorie voorspelt. Een niet-roterend zwart gat haalt typisch 16% (want de diepste stabiele baan van materie ligt bij  $R=3R_s$ ) en een zeer snel roterend zwart gat haalt zelfs 31% tot 43%. Dat is in alle gevallen veel meer dan de 1% die onze zon haalt uit kernfusie van waterstof tot helium. In figuur 2 zie je de productie van röntgenstraling door een zwart gat.

Wanneer zwarte gaten elkaar tegenkomen, kunnen ze samensmelten tot een zwart gat met een massa ongeveer gelijk aan de som van de massa's van de oor-



**FIGUUR 2** Productie van röntgenstraling (rood) door een accreterend zwart gat van  $10^5 M_{\odot}$ , tweehonderd miljoen jaar na de oerknal. Het zwarte gat staat in het centrum en de schaal is tien lichtjaar. Gas (wit-grijs) valt naar het zwarte gat (credit: Marco Spaans).

spronkelijke zwarte gaten (een deel van de massa kan omgezet worden in gravitationele golven). Vele kleintjes maken dus ook een grote. Zo kunnen kwantumzwarte gaten samensmelten tot grotere zwarte gaten en dus minder snel verdampen middels hawkingstraling. De grote zwarte gaten kunnen weer groeien tot supergrote zwarte gaten wanneer ze elkaar tegenkomen. Kwantum-, stellaire en monolithische zwarte gaten hebben dus ieder een eigen oorsprong, maar tevens een gezamenlijke historie die grote (meer dan  $10^5$  zonnemassa's) zwarte gaten in het jonge heelal mogelijk maakt.

## De eerste sterren

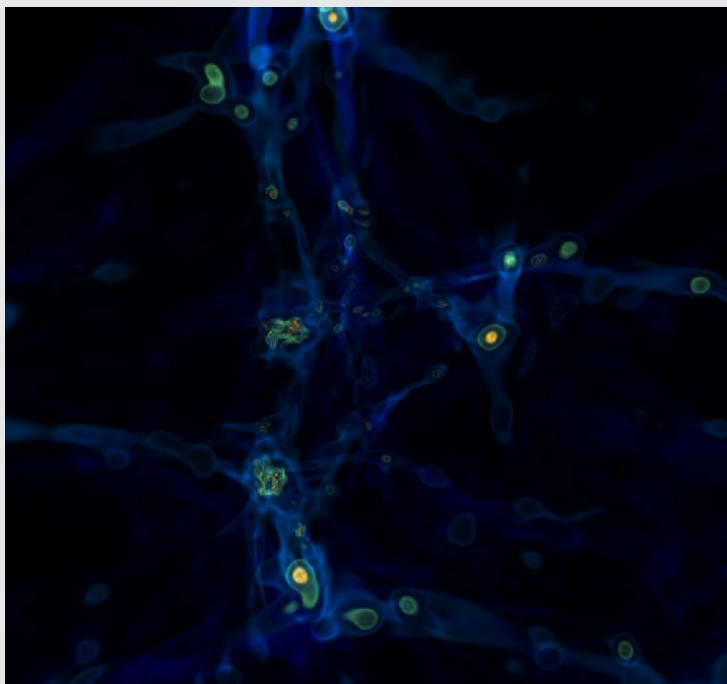
De eerste generatie sterren heet pop III.1 en maakt gebruik van moleculair waterstof, dat met een abundantie van  $10^{-3}$  ten opzichte van atomair waterstof voorkomt in het heelal. Moleculair waterstof stelt gas in staat een temperatuur van ongeveer 500 K te bereiken, omdat de eerste aangeslagen kwantumtoe-

stand van dit molecuul bij 512 K ligt. Botsingen tussen waterstofmoleculen en -atomen zetten kinetische energie om in rotationele energie van het moleculaire waterstof. Dergelijke rotatiekwantumtoestanden kunnen spontaan vervallen en een foton produceren. Als deze straling ontsnapt uit het medium koelt het gas, maar dit proces is niet meer efficiënt beneden 500 K.

Als je de jeansmassa  $M_J$  uitrekt voor  $T = 500$  K en een dichtheid  $\rho = 10^{-19}$  g cm<sup>-3</sup>, dan levert dit  $M_J = 100 M_{\odot}$  op. De allereerste sterren waren dus zwaar. Sterren in onze Melkweg zijn typisch  $0.5 M_{\odot}$ . Pop III.1 sterren stralen slechts één miljoen tot tien miljoen jaar en leveren na hun dood als supernova relatief vaak (één op de tien keer) een zwart gat op. Voor onze Melkweg is dit slechts een kans van één op duizend, omdat de meeste sterren niet zo zwaar zijn. Pop III.1 sterren in het jonge heelal zijn dus prima kandidaten om de eerste stellaire zwarte gaten van  $1 M_{\odot}$  tot  $10 M_{\odot}$  te produceren. Pop III.1 sterren stralen met een temperatuur van  $10^5$  K, veel heter dan de 6.000 K van

onze Zon. Dit alles vindt plaats wanneer het heelal honderd miljoen tot vijfhonderd miljoen jaar oud is en vijf tot dertig maal kleiner is dan nu. In figuur 3 zie je hoe de eerste gaswolken ineenstorten tot pop III.1 sterren.

Aan het eind van hun bestaan exploderen pop III.1 sterren als supernovae. Op deze manier verrijken zij het jonge heelal met elementen als C, N, O, Si, Fe, P en S. Met de aanwezigheid van zwaardere elementen neemt de gemiddelde gastemperatuur en dus  $M_J$ , af. Koolstof in de vorm van C<sup>+</sup> en zuurstof koelen het gas tot onder de 100 K, omdat hun aangeslagen kwantumtoestanden bij lagere energie liggen. Hierdoor is het mogelijk lichtere sterren te maken. Deze lijken al heel veel op de sterren die we nu zien in onze Melkweg ( $0.3 M_{\odot}$  tot  $2 M_{\odot}$ ), met slechts 1% van alle sterren zwaarder dan  $8 M_{\odot}$ . Al met al is er reeds vroeg in het heelal een fundamenteel samenspel tussen (mini) zwarte gaten en sterren, waarvan wij tot de dag van vandaag de vele consequenties ervaren •



**FIGUUR 3** Gaswolken storten ineen tot pop III.1 sterren (blauw-groen), honderd miljoen jaar na de oerknal. De schaal is honderd lichtjaar (credit: Marco Spaans).

### Referenties

- [1] A. Aykutaalp & M. Spaans 2011; *Astrophysical Journal*, 737, 63: The Complexity that the First Stars Brought to the Universe: Fragility of Metal-enriched Gas in a Radiation Field.
- [2] M. Spaans 2013; *International Journal of Modern Physics D*, Vol. 22, No. 9, 1330022: A Topological Extension of General Relativity to Explore the Nature of Quantum Space-time, Dark Energy and Inflation.

# Vorig Breinwerk

## *Aziatisch stenen tellen*

DOOR DE REDACTIE

**D**e redactie heeft helaas geen inzendingen mogen ontvangen deze keer. De titel 'Aziatisch stenen tellen' brengt dan meteen een grote vraag met zich mee. Kunnen de bètastudenten niet tellen? Of ligt het aan het Aziatisch tellen wat dit keer zo moeilijk was? Wellicht kunnen we allemaal wel een reisje naar Indonesië gebruiken om de Aziatische ma-

nier van tellen te doorgronden!

Aangezien de puzzel niet is opgelost, heeft helaas ook niemand het borspel 'Go' gewonnen. Desondanks kun je hieronder toch de oplossing vinden, om de knagende gevoelens en slapeloze nachten door een onopgeloste puzzel tegen te gaan•

### De oplossing

Laten we eerst de opgave nog eens herhalen.

*Twee spelers spelen een spel met twee stapels stenen. In elke beurt mag een speler een aantal stenen van de grootste stapel afhalen. Het aantal stenen dat van de stapel wordt afgehaald moet een positief veelvoud zijn van het aantal stenen dat op de laagste stapel ligt.*

*Bijvoorbeeld: laat het geordende paar  $(6, 14)$  de configuratie met 6 stenen op de kleinste stapel en 14 stenen op de grootste stapel beschrijven. De speler die begint (eerste speler) mag nu 6 of 12 stenen van de grootste stapel (die met 14 stenen) afhalen.*

*De speler die alle stenen van een stapel afhaalt wint het spel.*

*Een winnende configuratie is een configuratie waarbij de eerste speler kan winnen. De configuraties  $(1, 5)$ ,  $(2, 6)$  en  $(3, 12)$  zijn bijvoorbeeld winnende configuraties omdat de eerste speler meteen alle stenen van de grootste stapel kan halen.*

*Een verliezende configuratie is een configuratie waarbij de tweede speler kan winnen, onafhankelijk van wat de eerste speler doet.*

*De configuraties  $(2, 3)$  en  $(3, 4)$  zijn bijvoorbeeld verliezende configuraties, elke mogelijke zet van de eerste speler zorgt ervoor dat de tweede speler kan winnen.*

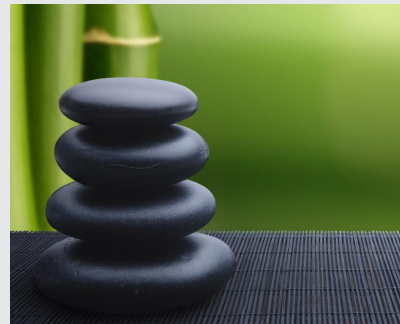
*Definieer  $S(N)$  als de som van  $x_i$  en  $y_i$  voor alle verliezende configuraties  $(x_i, y_i)$ , waarbij  $0 < x_i < y_i \leq N$ .*

*Men kan verifiëren dat  $S(10) = 211$  en  $S(10^6) = 230312207313$ .*

*Vind  $S(10^{16}) \bmod 7^{10}$ .*

Deze opgave vergt een lastige berekening waarbij  $S(x_i)$  en  $S(y_i)$  apart berekend dienen te worden. Verder kan er door wat gebruik te maken van de eigenschappen van de gouden ratio berekend worden dat  $S(10^{16}) \bmod 7^{10} = 54672965$ .

Om deze berekening wat makkelijker te maken zou je een script kunnen schrijven. Zoek hiervoor maar eens op 'answer project euler problem 325' en er komen genoeg scripts en ook het juiste antwoord komt te voorschijn!





# Nieuw Breinwerk

## Geheimschrift

DOOR DE REDACTIE

Op de televisie is het dezer dagen vrijwel onmogelijk om een dag te vinden waarop geen detectives worden uitgezonden. Inspector Frost, Lewis, Midsomer Murders, Tatort, Baantjer, wie kent ze niet? Het eerste echte verhaal over een detective is 'The Murders in the Rue Morgue' van Edger Allan Poe, een naam die we allemaal wel bij Engelse literatuur voorbij hebben zien komen. De echte doorbraak van de detective kwam echter pas bij de verhalen over de beroemdste privédetective Sherlock Holmes.

Sherlock Holmes lost met zijn medewerker Dr. Watson tientallen misdaden rondom Londen op. Van dit bekende verhaal zijn vele versies verschenen, tevens is Sherlock Holmes het meest verfilmde fictieve figuur. Afgelopen januari zijn de laatste afleveringen van seizoen vier van de detectiveserie Sherlock uitgekomen. Een ware ode aan het Sherlock Holmes verhaal, in een modern jasje. Tijdens een van de afleveringen van deze serie kwam een mysterieus geheimschrift aan bod. Een geheimschrift waar zelfs de geniale Sherlock niet één, twee, drie uitkwam. Een goede inspiratie voor een breinwerk!

Stuur voor 15 mei 2014 je oplossing op naar [perio@fmf.nl](mailto:perio@fmf.nl). Onder de goede inzendingen wordt een boek van Sherlock Holmes verloot •

### De opgave

In de tabel hieronder staat een geheime boodschap. Wanneer je deze code weet te ontcijferen, vind je een uitspraak van een zeer bekend persoon. Deze uitspraak en de naam van deze persoon is de oplossing van dit Breinwerk. Nog wat tips, omdat we niet verwachten dat iedereen zo goed is als Sherlock Holmes: afkortingen en formules gelden als één woord, de grijze kaders, titels, kopjes, ondertitels, inleidingen en citaten tellen niet mee, alinea's tellen wel mee.

1	1	1	1	4	1	1			
0	7	5	6	1	0	3	5	0	
0	3	9	1	0	3	1	3	0	
0	9	1	2	4	1	1	4		
1	3	2	8	3	6	4			
0	6	1	1	1	2	9	2	5	2
1	4	1	1	4	5	5	8		
1	3	2	7	3	5				
1	0	4	1	7	6	9	1		
0	8	1	6	2	6				
0	7	3	4	3	2	1	3	7	
0	4	9	1	0	1	4	1	8	6
1	3	2	3	0	2	3	5		
0	5	1	2	7	1	4	0		
1	4	1	2	2	1	1	8		

Deze uitspraak is van: .....



# Bootstrappercolatie

DOOR AERNOUT VAN ENTER

Bootstrappercolatie beschrijft een klasse van simpele modellen waaraan we in onze groep jaren gewerkt hebben, zowel met collega's in binnen- en buitenland, als met studenten. We bekijken een eindige of oneindige graaf, bijvoorbeeld een vierkant rooster, en zetten op roosterpunten deeltjes neer. Daarna passen we een groeiregel toe, die zegt dat elk leeg punt dat meer dan een drempelwaarde  $r$  aan bezette punten in zijn omgeving heeft, zelf ook bezet wordt. Daarna blijven we de groeiregel herhaaldelijk toepassen, totdat we niet meer groeien. Wat gebeurt er op den duur?

Een dergelijke groeiregel, die een discrete parallele en deterministische dynamica beschrijft,

is een simpel voorbeeld van een Cellulaire Automaat. Elk punt kan in twee toestanden voorkomen, leeg of bezet, en er is een deterministische overgangsregel die afhangt van de toestand in een eindige omgeving.

Het is duidelijk dat het gedrag zal afhangen van de keuze van de drempelwaarde  $r$  en van de keuze van de omgeving. De simpelste "interessante" keuze is  $r=2$ , op een vierkant rooster, waarbij de omgeving van een punt bestaat uit zijn vier burens.

$$\mathcal{N} = \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \quad 0 \quad \bullet \\ \bullet \end{array}$$

Als je een eindig vierkant hebt ter grootte van  $N$  keer  $N$  dan is er een mooi argument dat je tenminste  $N$  bezette punten nodig hebt in het begin om het hele vierkant op te vullen. Voor de wiskundige puzzelaars, zie [4, 12, 14, 15]. Dat  $N$  voldoende is, is simpel in te zien, als je de  $N$  diagonaalpunten bezet, dan wordt het hele vierkant op den duur opgevuld.

*“In hogere dimensies kun je maar het beste ophouden met computerberekeningen en het speelveld aan de wiskundigen laten.”*

Als je elk punt onafhankelijk, met een kans  $p$  bezet en dus een toevallige beginvoorwaarde hanteert, kun je je

afvragen hoe het eindgedrag van het systeem zal zijn. Simulaties bij lage  $p$  laten zien dat mogelijke eindconfiguraties bestaan uit verzamelingen van bezette rechthoeken, die leven in een lege omgeving.

Configuraties van zulke rechthoekige, bezette eilanden in een lege oceaan, op afstand tenminste twee van elkaar, zijn stabiel, dat wil zeggen de eilanden groeien niet zoals makkelijk is in te zien. Immers, elk leeg punt kan hoogstens één bezette buur binnen zo'n rechthoekig eiland hebben.

De eerste vraag die je je kunt stellen, is of inderdaad, zoals simulaties suggereren, bij voldoende lage  $p$  het systeem niet en bij hogere  $p$  het systeem wel opgevuld raakt.

Voor een oneindig groot vierkant rooster is het antwoord daarop negatief. Hoe klein de bezettingskans in het begin ook is, op den duur raakt elk roosterpunt bezet. Je kunt dat bewijzen door op te merken dat een voldoende groot  $N$  keer  $N$  vierkant dat helemaal bezet is met grote kans,  $(1 - (1-p)^N)^4$ , een bezet punt

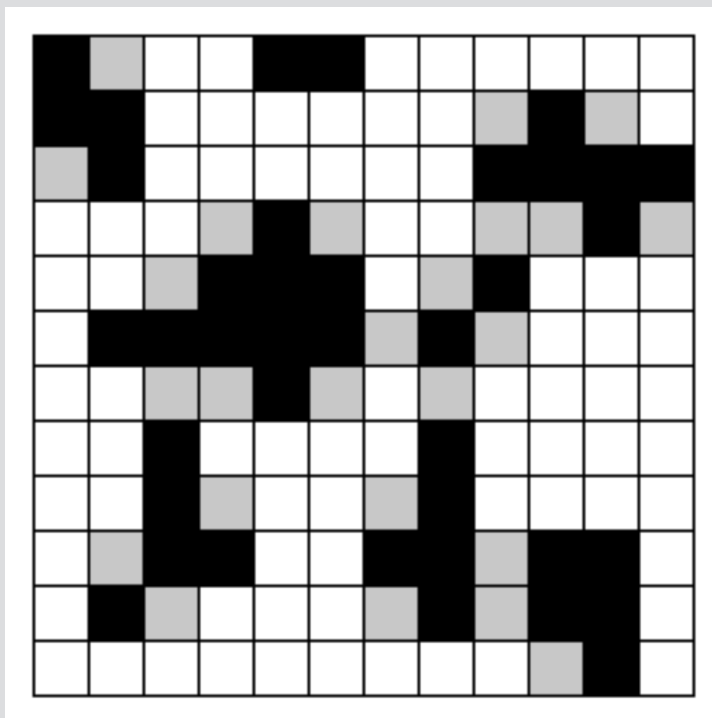
op elk van de vier zijden heeft, daarmee die vier zijden opvult en dus een  $N+2$  keer  $N+2$  vierkant vormt. De kans dat de groei stopt kun je afschatten met de kans dat er ergens een rechthoekige blokkade van lege punten bestaat. Als zo'n blokkade lengte  $L$  heeft, heeft hij kans  $(1-p)^4$  om voor te komen, en het aantal mogelijke rechthoeken van lengte  $L$ , dat een gegeven punt omsluit, groeit hoogstens polynomiaal in  $L$ . De kans dat een bezet vierkant wordt geblokkeerd in zijn groei is dus klein, en de kans dat er ergens, mogelijk heel ver weg, zo'n bezet vierkant is dat maar blijft doorgroeien is 1. Zo'n bezet vierkant is dus een soort groeikern [7].

Dit is hetzelfde type argument dat een aap met een schrijfmachine in oneindige tijd met kans één na verloop van tijd de verzamelde werken van Shakespeare produceert. Maar de vraag is hoe lang je daarop moet wachten?

In bootstrappercolatie is de equivalente vraag dan hoe groot het systeem moet zijn opdat het met behoorlijke kans (zeg kans een half) bezet raakt, bij gegeven initiele bezettingsdichtheid  $p$ .

Het blijkt dat die kritieke grootte exponentieel groeit als  $N_c = \exp O(\frac{1}{p})$ , of na inverteren, de kritieke "percolatiedrempel" gaat logaritmisch naar nul:  $p_c = O(\frac{1}{\ln N})$ .

Aan bootstrappercolatie is gewerkt door onderzoekers van allerlei slag. Ik hoorde er voor het eerst over van Joan Adler, die computationele natuurkunde bedrijft



**FIGUUR 1** Een voorbeeld van een simulatie van een bootstrappercolatie waarbij in het begin de zwarte vakjes wel en de witte vakjes niet bezet zijn. De grijs gekleurde vakjes worden na een beurt bezet, omdat tenminste twee van hun burens bezet zijn [16].

en een expert is op het gebied van simulaties en reeksontwikkelingen. Ze bekeek bootstrappercolatie als een voorbeeld van een model voor (magnetische) faseovergangen. Hoewel bootstrappercolatie geschapen lijkt voor computersimulaties (alles is discreet: toestand, ruimte, tijd), blijkt dat eigenlijk juist helemaal niet zo te zijn. De bovengenoemde logaritmische daling naar nul was verwarrend, aangezien men bij "finite-sizedgedrag" van faseovergangen in het algemeen iets van de vorm  $O(N^{-cst})$  verwachtte, waar de constante een soort kritieke exponent zou moeten zijn. Zelfs nadat het logaritmische gedrag begrepen was en men probeerde de constante prefactor  $C$  te bepalen van  $p_c = \frac{C}{\ln N} + o(\frac{1}{\ln N})$ , bleek men er nog een factor 2 naast te zitten (numeriek werd de constante als



dat nu  $N_c = \exp O(\frac{1}{p} \ln^2 \frac{1}{p})$ , of na inverteren, dat de kritieke percolatiedrempel zich gaat gedragen als:  $p_c = O(\frac{\ln^2 \ln N}{\ln N})$ . Dit is aangetoond in de bachelorscriptie van Tim Hulshof, zie ook [8].

De constante voorfactor laat zich uitrekenen [5], maar het verschil tussen de systematische en de statistische fout wordt nog groter, dus numeriek is dit model nog hopelozener. Hier zou je systeemgrootte  $N = 10^{10^{1400}}$  moeten zijn om het asymptotisch dominante gedrag te kunnen observeren.

De statistische fout wordt nu, zoals aangetoond in de bachelorscriptie van Susan Boerma-Klooster,  $O(\frac{\ln^3 \ln N}{\ln^2 N})$  [3], maar de systematische fout is nu  $O(\frac{\ln \ln N \ln \ln \ln N}{\ln N})$  [6]. De groeikern wordt in dit geval gevormd door een verticale strip ter dikte 2, die langzaam in de verticale richting, maar steeds sneller in de horizontale richting gaat groeien. Met andere woorden, de groeikern heeft nu een veranderlijke vorm, hij verandert van verticaal tot horizontaal, voordat hij in beide richtingen gaat groeien.

In hogere dimensies krijgen we herhaalde exponenten en logaritmes, dat wil zeggen dat in drie dimensies bijvoorbeeld geldt dat

$$N_c = e^{e^{O(\frac{1}{p})}} \text{ dan wel } p_c = O(\frac{1}{\ln \ln N}).$$

Hierbij kun je maar het beste ophouden met computerberekeningen en het speelveld aan de wiskundigen laten.

Als je bootstrappercolatie op bomen of random grafen beschouwt, treedt er wel een faseovergang op, maar eentje van een bijzonder type. De overgang is van het zogenaamde gemengde of hybride type, dat wil zeggen dat voor kleine  $p$  er alleen kleine eilandes voorkomen, terwijl er vanaf de drempelwaarde een positieve dichtheid van bezette punten in een of meer grote (oneindige) eilanden optreedt met een positieve minimumwaarde. Dat is karakteristiek voor wat we een  $1^c$ -orde overgang noemen. Anderzijds treden er bij de drempelwaarde divergerende correlatielengtes en kritieke exponenten op (zie boven) die typisch

voor  $2^c$ -orde overgangen zijn. De combinatie is ongevoel, maar wordt wel als typisch voor de glasovergang beschouwd. Sommige aspecten zijn tot in detail bekend, maar er zijn ook nog allerlei dingen die we ons afvragen. Mocht je meer willen weten, kom eens langs op kamer 484 van de Bernoulliborg. Met dank aan Tim Hulshof en Susan Boerma-Klooster •

## Referenties

- [1] Adler and U. Lev, bootstrap percolation: visualisations and applications. **Braz. J. Phys.** 33, 641--644 (2003).
- [2] Aizenman and J.-L.-Lebowitz, Metastability effects in bootstrap percolation. **J. Phys. A** 21, 3801--3813 (1988)
- [3] Susan Boerma-Klooster, A sharp threshold for an anisotropic bootstrap percolation model. Groningen bachelor thesis (2011), see <http://scripties.fwn.eldoc.ub.rug.nl/scripties/Wiskunde/Bachelor/2014/Boerma.S./>
- [4] B. Bollobas, The Art of mathematics: Coffee Time in Memphis, problems 34 and 35, Cambridge University Press, Cambridge (2006)
- [5] H. Duminil-Copin, A. C. D. van Enter, Sharp metastability threshold for an anisotropic bootstrap percolation model. **Ann. Prob.** 41, 1218--1242 (2013)
- [6] H. Duminil-Copin, A. C. D. van Enter, W. J. T. Hulshof and R. Morris, in preparation.
- [7] A. C. D. van Enter, Proof of Straley's Argument for Bootstrap Percolation, **J.Stat.Phys.** 48, 943--945 (1987).
- [8] A. C. D. van Enter and W. J. T. Hulshof, Finite-size effects for anisotropic bootstrap percolation: logarithmic corrections. **J. Stat. Phys.** 128, 1383--1389 (2007).
- [9] J. Gravner and D. Griffeath, First passage times for threshold growth dynamics on  $\mathbb{Z}^d$ . **Ann. Prob.** 24, 1752--1778 (1996).
- [10] J. Gravner and A. Holroyd, Slow convergence in bootstrap percolation. **Ann. Appl. Prob.** 18, 909--928 (2008).
- [11] A. E. Holroyd, Sharp metastability threshold for two-dimensional bootstrap percolation. **Prob. Th. Rel. Fields** 125, 195--224 (2003).
- [12] New York Times Wordplay Blog, 8 July 2013, see [http://wordplay.blogs.nytimes.com/2013/07/08/bollobas/?\\_r=0](http://wordplay.blogs.nytimes.com/2013/07/08/bollobas/?_r=0)
- [13] R.H. Schonmann On the Behavior of some Cellular Automata related to Bootstrap Percolation, **Ann. Prob.** 20, 174--193 (1992).
- [14] P. Winkler, Mathematical Puzzles (p 79), The infected Checkerboard. A. K. Peters Ltd (2004).
- [15] P. Winkler, Mathematical Mindbenders (p 91), Infected Hypercubes, A.-K. Peters Ltd (2007).
- [16] Béla Bollobás, The Art of Mathematics, 2006.

# De eerste weken

## *Making Sense*

DOOR BERND RIETBERG

“Professor, which textbook are we going to use for this course?” “I use this book.” Ze houdt een boek omhoog uit 1987. “Where can I buy this book?” “Uhm, you can download it.” “Oh great! Is there some ITB-website where I can download this?” “Uh, no you can download it somewhere online, or use torrent. Then just make a copy of the book.”

**H**aha, dit is een professioneel instituut wat mij zowat vertelt om te “piraten.” Het blijkt dat bijna alle boeken hier gekopieerd worden. De straten hier staan daarom ook vol met copyshops en dat kopiëren doen ze hier ook erg netjes, super mooie kopieën. Voor de campus staan vijf illegale softwareshops. “*Welcome to Asia my friends.*”

*Bandung, Indonesië.* De komende zeven maanden ben jij mijn thuis. Miljoenenstad waar alles goedkoop is, de mensen vriendelijk zijn en het verkeer 24/7 vaststaat. Waarom Bandung? Omdat Indonesia geweldig is. En het onderwijs? Niet super, maar adequaat genoeg om de examencommissie te overtuigen dat ik hier kan studeren. Dat is denk ik wel de **Dikke Tip van Berrend**

**I:** “Wil je ook naar het buitenland toe? Dan staat de examencommissie daar echt wel positief tegenover. En met een beetje doorzettingsvermogen kun je ze dan overtuigen. Ik bedoel, Hawaï? Pakistan? Argentinië? Er zijn nog zoveel plekken waar we naartoe kunnen gaan.”

### Het diepe in en goed ook

Het is best raar om de wereld om je heen opeens niet meer volledig te begrijpen. Hier begin ik helemaal vanaf nul, ik ken hier niemand, ik ken de stad niet, spreek de taal niet, ik weet niet waar de supermarkt is en ik heb geen idee hoe het verkeer hier werkt. Oké, dus het noorden is die kant op, dan is de campus daar?

Waarom verkopen ze geen eten in de supermarkt? Oh, eten kook je hier niet zelf. Oef dat eten is echt *spicy*. Dat doen we maar niet meer, hoe heette het nu ook alweer? *Jayegnapelajelaje* of *Terima kasih*? Wie maakt er nou zoveel lawaai om vier uur 's nachts? O, het nachtelijk gebed. Hoe zei je nou dat de douche werkt? Hebben jullie geen normaal toilet, gebruiken jullie geen wc-papier? Maar wat gebruiken jullie dan? Ik neem voortaan m'n eigen wc-papier wel mee.

In Indonesië is je sociale netwerk van levensbelang. Je sociale netwerk is je bron van informatie, je mogelijkheid tot het verwezenlijken van zo'n beetje alles. Alles gaat hier via via. Daarmee ben ik ineens afhankelijk van iedereen om me heen en dat maakt het leven hier heel anders dan in Nederland.

Natuurlijk wist ik dit van te voren, Suriname en Zuid-Afrika waren ook zo, maar het is echt anders om nu een nieuw leven op te bouwen in zo'n cultuur. Zo kom ik alles te weten over mijn studie via mijn contacten op de campus, alles over immigratie via het *International Relation Office*, etc. Ook het kopen van dingen gaat natuurlijk zo. Wat ook erg handig kan zijn: ik vraag nu gewoon aan een willekeurig iemand op straat wat ik wil kopen en vervolgens haalt hij het halve dorp erbij om het voor me te regelen. Laatst bevond ik mij bijvoorbeeld in Jakarta op zoek naar een paraplu. Ik vroeg het toen aan een willekeurige persoon op straat. Voor ik het wist stonden er zeven kleine mannen om me heen te discussiëren, werd ik achterop een scooter

*“Er zijn nog zoveel plekken waar we naartoe kunnen gaan.”*



gezet en sjeesden we tussen kleine steegjes op weg naar een *payung* (paraplu).

Ik vind het altijd erg fijn om onafhankelijk te kunnen zijn. Het feit dat men op straat hier bijna geen Engels spreekt (op de universiteit is het anders), maakt mij afhankelijker van anderen. Ik wil dingen zelf kunnen en zelf kunnen regelen, zodat ik weet dat het goed komt. Als ik afhankelijk ben van anderen, weet ik dat niet meer zeker. Gelukkig is Google mijn vriend, met “Google maps” en “Google translate” kom ik een heel eind!

Ik denk ook niet dat dit avontuur mijn Engels erop vooruit zal helpen, eerder verwacht ik achteruitgang. Ik laat tegenwoordig bijvoorbeeld “*Would you happen to have some -*” maar weg, en zeg nu gewoon: “*Bananas?*”, anders snappen ze er geen reet van. Ook wen ik mijzelf het Indonesisch-Engels accent aan, dan verstaan ze je veel beter. Vraag ik bijvoorbeeld naar een *ATM Machine* (pinautomaat) op z'n Engels: “*eh thi em masjiiieene? Where? Where eh thi ehm?*”, dan is het antwoord: “*No, no, no.*” “*You don't know?*” “*No, no.*” Maar zeg ik vervolgens: “*Ah teh ehm masien? Where ah teh ehm?*” Dan is het: “*Oh! Ah teh ehm! Oh, there, there ah teh ehm.*” Hahahaha, een vriend zei zelfs: “je moet soms zelfs even de uitspraak tunen, zoeken naar

de juiste uitspraak.” Zoek je de universiteit (ITB), dan gaat dat ongeveer zo: “*Ai thi bii? Ih teh beh? School? Ihbe? Ehtbi?*” Tot de juiste uitspraak is gevonden en een mooie “*Oh! Ihthibi!*” weerklinkt. Ik ben zelfs een keer bij de school ICB beland, omdat mijn uitspraak net niet goed was (c=ts in Indonesië).



Inmiddels heb ik een team vrienden samengesteld met wie ik hier vette trips naar Bali, Lombok, Karimun Jawa, etc. heb mogen ondernemen. Voor mij is een groep vrienden om me heen belangrijk om me op m'n plek te voelen.

Dinsdagavond zijn we uiteten gegaan bij Verde. Ze hebben daar echt fantastische pizza's. De pizza heeft de vorm van een grote halve bol, beschilderd met alle kleuren van de regenboog. Vervolgens flamberen ze de pizza met wodka op je tafel, zie de foto op de vorige pagina. Goed idee als ik indruk wil maken op m'n date, gewoon het eten flamberen. Geflambeerde huts-pot, complimenten gegarandeerd. "Hier is je yoghurt met roosvice, liefje, maar wacht ik flambeer het nog even met deze wodka."

Het studeren gaat hier verder prima! Je moet niet

denken dat ik naar alle colleges ga, want dat is niet zo. Voornamelijk omdat de meeste colleges in slecht Engels worden gegeven. Gelukkig zijn de professoren erg behulpzaam en doe ik bijna alle vakken via zelfstudie. Dat is denk ik wel de **Dikke Tip van Berrend 2**: "In het buitenland moet je wel zelf alles fixen, dus wees lekker ondernemend en ga met een actieve houding aan de slag. Dan is Indonesië geweldig, want ze helpen je overal bij. "

Ik heb nu m'n plekje kunnen vinden in Bandung en snap nu redelijk hoe het leven hier werkt. De studie is ook begonnen en dat probeer ik op te starten. Inmiddels heb ik m'n nieuwe vrienden echt goed leren kennen en zijn het goede vrienden van mij aan het worden. Langzaam laat ik 'Making sense' achter me en stap ik in de volgende fase: 'To enjoy and to experience'•







**PHILIPS**

# Visterrine van huize Jordens

DOOR MAIKE JASPERS & LEILA JORDENS-COTRAN

Als bestuurslid van onze mooie vereniging heb je de eer om bij de ereleden te gaan eten. Zo zat het vijfenvijftigste bestuur ook eens in huize Jordens aan tafel. Allerlei heerlijke gerechten werden gepresenteerd. Waaronder deze heerlijke visterrine die perfect als voorgerecht, lunch of hapje voor op een feest kan dienen. Hiernaast het recept van Leila Jordens-Cotran.



Moeilijkheid:



Personen:

5 - 7

Bereidingstijd:

+/- 50 min bereiding  
4 uur in de koelkast



## Ingrediënten

- Pak gerookte zalm
- Pak gerookte forel
- 2 blikken tonijn op water
- Mayonaise, een paar flinke eetlepels
- Klein bakje crème fraîche (mag meer)
- Een paar eetlepels yoghurt, Griekse stijl
- Één ruime eetlepel heel fijn gesneden (of dik geraspte) ui
- 5 à 6 bladjes gelatine
- 1 of 2 eetlepel(s) tomaten ketchup
- Veel fijn gesneden peterselie
- Een halve eetlepel kappertjes
- Facultatief: een fijn geperste teen knoflook
- Olie

## Materiaal

- Magnetron
- Bakje voor in de magnetron
- Cakevorm of een andere schaal
- Folie

## Smaak toevoegen

De hoeveelheden mayonaise, yoghurt, crème fraîche en ketchup zijn een kwestie van proberen en proeven. Mag meer of minder, naar eigen smaak. Beslis dat later als alles gemengd is, op grond van de consistentie en smaak van het geheel.

Om nog extra smaak te geven aan het gerecht kun je de volgende producten gebruiken: gemalen peper, scheutje whisky, scheutje geperste citroensap, een paar drupjes Worcestershire, een paar drupjes Thaise vis-saus of paprikapoeder. Het geheel moet smeuijg maar niet te waterig zijn. Als dat laatste het geval is dan voeg je beter nog een half of zelfs een heel blik tonijn toe.

## Bereiding

1. Week de gelatine in koud water.
2. Laat de tonijn goed uitlekken (het vocht uitspersen). Bewaar twee of drie eetlepels vocht in een apart bakje dat in de magnetron kan.
3. Maak de saus: alles mag door elkaar gemengd worden, behalve de vissoorten.
4. Voeg de tonijn en de forel (niet de zalm plakjes) in niet te grote stukken aan de saus toe.
5. Warm op het laatste moment het bakje met tonijn vocht in de magnetron op en haal het er dan uit. De zacht geworden gelatine mag dan uit het koude water worden gehaald, goed uitgeperst worden en worden toegevoegd aan het bakje hete tonijnvocht. Roer goed door tot het oplost. Laat de opgeloste gelatine een beetje afkoelen en meng het dan goed met de saus en de vis.

## In de schaal

Voor het opdienen kies je het liefst een cakevorm of een andere schaal. Smeer hiervoor de bodem in met olie. Bedek daarna de bodem en de zijanten half met de plakjes gerookte zalm. Giet vervolgens het vismengsel in de vorm over de zalmplakjes. Dek het af met folie en laat het dan in de koelkast minstens 4 uur opstijven. Het kan ook een dag van tevoren worden klaargemaakt.

Een extra serveertip: eet de visterrine met stokbrood, Melba toastjes of andere broodproducten •

## Referentie

- [1] Leila Jordens-Cotran, Haren, 7 april 2013.

# Atomic Force Microscopy

## *A probe of surface topography & vdWaals/Casimir forces*

DOOR GEORGE PALASANTZAS

AFM is a powerful imaging tool that provides topography information about surfaces with nanoscale resolution (and under certain conditions atomic resolution), but it is also a tool to measure electromagnetic properties and surface forces, providing valuable information about the interaction state of surface matter. But how did we arrive there?

**A**fter the discovery of the scanning tunneling microscope (STM) by G. Binnig and H. Rohrer at IBM labs [1], which gave them the Nobel Prize for Physics in 1986, G. Binnig and co-workers also developed the first atomic force microscope (AFM) in 1986 [2]. The drive for this discovery was the fact that a fundamental disadvantage of the STM was that only conductive surfaces could be investigated. Indeed, G. Binnig was the first who guessed that the interaction of a macroscopic cantilever having a sharp tip with a sample surface can lead to cantilever bending by atomic forces, to a sufficient degree, that can be measured by common facilities [2]. Three years later, in 1989, the first commercially available AFM was introduced. Today the AFM provides a typical lateral resolution, in the order of a few nanometers ( $\text{nm} = 10^{-9} \text{ m}$ ), that is more than  $10^2$  times better than the optical diffraction limit ( $\sim \lambda/2$  with  $\lambda \sim 500 \text{ nm}$  a typical light wavelength), while atomic resolution has become possible with quality that compares to that of STM [3, 4].

Nowadays the AFM is a front line research tool for imaging, measuring and manipulating matter at nanometer length scales. The information from the AFM is collected by feeling the material surfaces with a mechanical probe, while piezoelectric elements facilitate tiny but precise movements (*feedback controlled via electric commands*) enabling very precise lateral scanning (Fig. 1). In fact an AFM includes a tip mounted on a micromachined cantilever as it is shown in Fig.1a. As the tip scans a surface of interest interatomic forces between the tip and the sample surface induce displacement of the tip and therefore bending of the cantilever. A laser beam is transmitted

onto the cantilever and subsequently is reflected from the cantilever surface onto a position-sensitive photodiode detector, generating photovoltage (Fig. 1b). The output of the photodiode is provided to a computer for processing of the data to provide a topographical image of the surface with nanometer resolution. This system detects cantilever deflections (limited only by thermomechanical noise vibrations)  $< 1 \text{ \AA}$  ( $= 10^{-10} \text{ m}$ ). The position-sensitive detectors that are used in commercial AFM's are four-sectional, allowing the measurement of longitudinal (out of the plane) and torsion bending (e.g., useful for friction studies).

Figure 2 shows a schematic of the forces acting on the tip upon approach towards the surface. Under ideal experimental conditions (*i.e. in high/ultrahigh vacuum*), as the cantilever tip approaches the sample surface, attractive van der Waals (*or the more general Casimir-Lifshitz*) forces start acting on it. These dispersive forces are sufficiently far-ranging and are felt over distances of a few tens of angstroms up to hundreds of nanometers. Upon contact a short range repulsive force starts acting on the tip due to overlap of atomic orbitals. As Figure 2 shows, in air additional attractive forces can act on the tip due to formation of capillary menisci. This is because on hydrophilic surfaces, as is assumed both tip and sample are, there are ultra-thin water layers ( $\sim 1\text{-}2 \text{ nm}$  thick) present. In general the cantilever can be bended by direct contact forces under the tip-sample surface interaction and by the long range forces, such as the van der Waals/Casimir, magnetic, electric, capillary, steric repulsive forces, etc. [5].

The cantilever can also be set to vibrate during scanning (*dynamic mode*) as firstly proposed by Binnig [2] or to just bring the tip into contact by application of a constant force (*contact mode*). For the dynamic mode the vibration can proceed up to the point where the tip comes in direct contact with the sample surface (*also called tapping mode*), or without touching the surface during vibration (*non-contact mode*). Today all these abilities have generated many techniques and modes of AFM operation. Below we will briefly describe the contact, and tapping mode that are most commonly used for investigations of material surfaces in ambient conditions.

### Contact mode imaging

This mode is the basic one for all AFM techniques where the AFM tip is in physical contact with the sample surface (Fig. 2) under a constant applied load. Capillary, electrostatic, repulsion and van der Waals attraction forces at the point where the tip touches the sample and forces acting upon the tip from the deformed cantilever compensate each other in equilibrium. Indeed, as the AFM tip scans along the sample surface, the sample topography induces a vertical deflection of the cantilever. The feedback loop maintains a specific load force and its response is used to generate a topographic image. The contact mode is suitable for materials science, biological applications and basic research. It also serves as a basis for further scanning probe microscopy (SPM) techniques (e.g. friction force measurement, spreading resistance, piezoresponse force microscopy, etc.) that require direct tip-sample contact.

The major advantage of contact mode, under constant force, is the possibility to measure with high resolution simultaneously topography and other surface properties (friction forces, spreading resistance, ferroelectric properties, etc.). However, the disadvantages include the speed of scanning, which is restricted by the response time of the feedback system, damage of soft samples (like polymers, biological samples, Langmuir-Blodgett films, etc.) by scratching because the probe tip is in direct contact with the surface, and

the possible existence of substantial capillary forces imposed by the liquid adsorption layer leading to loss of resolution. The spring constant value  $k$  for different cantilevers varies usually from 0.01 to several N/m. In fact, interatomic force constants in solids are 10-100 N/m, and in biological samples  $k \sim 0.1$  N/m. Therefore typical cantilever spring constants  $k$  for contact mode (in order to minimize sample damage) are  $k = 0.01-5$  N/m.

### Amplitude Modulation or Tapping Mode (TM) imaging

The development of this dynamic mode (Fig. 1) for operation in air enabled researchers to image samples very fragile to the lateral forces of contact mode and also to use scan speeds much higher than those in non-contact mode. This is a technique that maps the surface topography by lightly tapping the surface with an oscillating tip (Fig. 1). In more detail, the cantilever is oscillating at or near its resonance frequency (*with a typical value of  $\sim 70-300$  KHz*) with an amplitude ranging typically from 10 – 100 nm. The frequency of oscillation can be at or on either side of the resonant frequency (typically around 5 % off). The tip lightly “taps” on the sample surface during scanning, contacting the surface at the bottom of its swing. The feedback loop maintains a constant oscillation amplitude (*set point amplitude*) by maintaining a constant root-mean-square (RMS) value of the oscillation signal acquired by the split photodiode detector (Fig. 1b). The vertical position of the scanner at each (x,y)-data point is changed in order to maintain a constant “set-point” amplitude and it is stored [3]. Operation can take place in ambient and liquid environments. When imaging in air, the typical amplitude of the oscillation allows the tip to contact the surface through the adsorbed fluid layer without getting stuck. Typical spring constants for TM imaging are in the range  $k \sim 5-40$  N/m.

The theoretical analysis of the tapping-mode emphasizes the coexistence, in many situations of interest, of two stable oscillation states: a low and high amplitude oscillation [3]. The coexistence of those oscillation

states is a consequence of the presence of attractive and repulsive components in the interaction force and their non-linear dependence on the tip–surface separation. During imaging of soft samples the low oscillation amplitude mode is chosen to keep the contact time with the sample low and thus to minimize surface damage [3]. Figure 3 shows examples of various samples using tapping mode imaging in air. Note that because the characteristic transient time of a stable oscillation is  $\tau=2Q/f_0$ , with  $f_0$  the cantilever resonance frequency and  $Q\sim 300$  the quality factor in air, if one wishes to apply the same technique in vacuum where  $Q\sim 2\times 10^4$  for commercial cantilevers, then a possibility would be to reduce  $Q$  by nanostructuring of the cantilever surfaces [6].

TM imaging allows one to obtain simultaneous topographic and compositional contrast in heterogeneous samples by recording the phase angle difference between the external excitation of the cantilever and the tip motion (*phase imaging*). In phase imaging, the phase lag of the tip relative to the excitation signal is monitored and recorded while the feedback keeps the amplitude at a fixed value. Changes in phase lag often indicate changes in the properties of the sample surface. In the picture of a damped harmonic oscillator to describe the cantilever motion, the phase lag depends on the medium ( $Q$  factor) and the relationship between the excitation and resonance frequencies of the oscillator (*the same factors that control the amplitude*). Based on the harmonic oscillator analogy, it seems reasonable to expect some sensitivity of the phase shift to surface properties. Several groups have investigated the potential of phase imaging to detect variations in material properties such as adhesion, elasticity and viscoelasticity or to image samples with large vertical variations [3]. Phase imaging is a key element in a number of AFM techniques, including Magnetic Force Microscopy (MFM), Electric Force Microscopy (EFM), and Scanning Capacitance Microscopy (SCM). Note that SCM is derived from Contact Mode and measures changes in capacitance between the tip and the sample surface.

Finally, we should point out that this popular AFM

mode is the basis for many advanced modes, such as the EFM, MFM etc., where the operation takes place in the so-called *LiftmodeTM*. This is a technique where in general the sample is scanned first using a regular topographic mode (e.g., Contact, Tapping Mode (*TM*)). Then the cantilever is moved to a specific height above the surface (*Fig. 2b*). The following line traces the previously acquired topography back and adds a  $Z$ -offset. LiftmodeTM is also used during the so called Kelvin Probe Force Microscopy (KPFM), where the cantilever is set to electromechanical motion using a periodic electric signal (amplitude  $\sim 1$ -6 V) and frequency close to the cantilever resonance frequency, allowing measurements of the contact potential variations between tip and surface [7].

## Force measurements

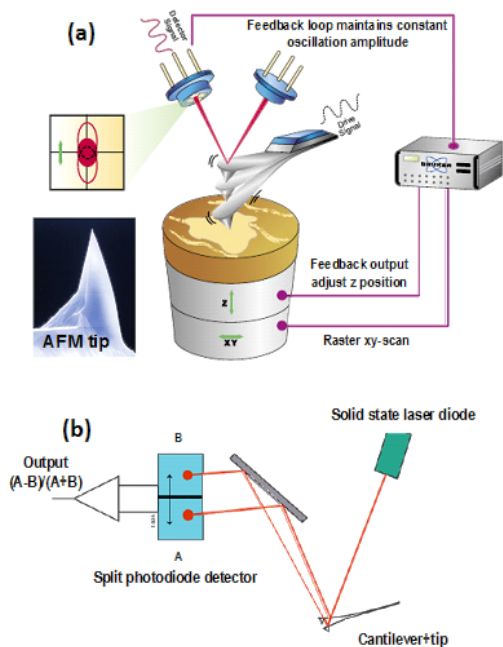
The AFM is not only an imaging tool to provide the topography of surfaces with nanoscale resolution, but it is also a tool to measure surface forces versus separation distance curves, the so called force curves. The force measurements provide valuable information on local material properties, such as elasticity, hardness, Hamaker constant, surface charge densities, adhesion, etc., and also allow the investigations of fundamental physics that is known as table-top laboratory cosmology. At any rate in a typical AFM force measurement setup the sample is moved up/down by applying a voltage to the piezoelectric translator, on which the sample under investigation is mounted. Further the system measures the cantilever deflection, which is a typical static mode force measurement (*Fig.3*). If the cantilever is moved, instead of the sample, by the piezoelectric translator the description remains the same.

Now with the AFM fully equipped for force measurements, instead of using cantilevers with a sharp tip (*depending also on the research aim*), many researchers use the colloidal probe technique [7-11]. Here a sphere is glued onto a tipless cantilever, or sometimes onto a sample while the tipless cantilever provides the surface [9]. With smooth spheres (*microns in size*) of well defined radius  $R$ :

- (i) the force can be analyzed in a quantitative manner;
- (ii) the total force is higher since the effective interaction area with the sample increases and thus the measurement can be more sensitive (typical radius for force measurement are  $R \sim 1\text{-}100 \mu\text{m}$ );
- (iii) it is possible to make a variety of probes by attaching particles of different chemical composition and radii to cantilevers.

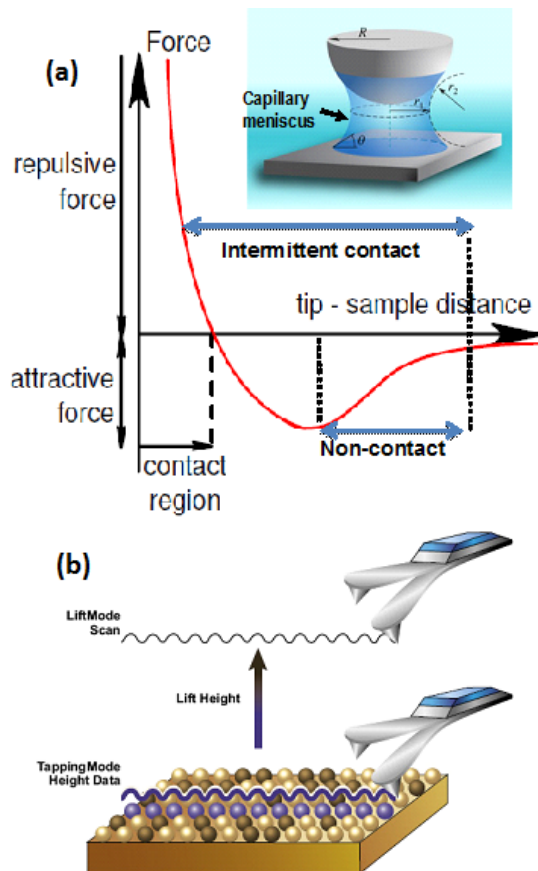
Important concerns for colloid probes are:

- (1) the surface quality of spheres (it can be investigated by direct AFM imaging or via the inverse AFM technique) [8];
- (2) how the microspheres can be produced and how precise the radius  $R$  can be obtained;
- (3) how can they be attached onto cantilevers.



**FIGURE 1** (a) Typical AFM system where a cantilever is mounted with a sharp tip operating above a surface in dynamic mode. (b) Laser light is reflected off the back of the cantilever and collected by detector (it can sense cantilever deflections  $< 1 \text{ \AA}$ ).

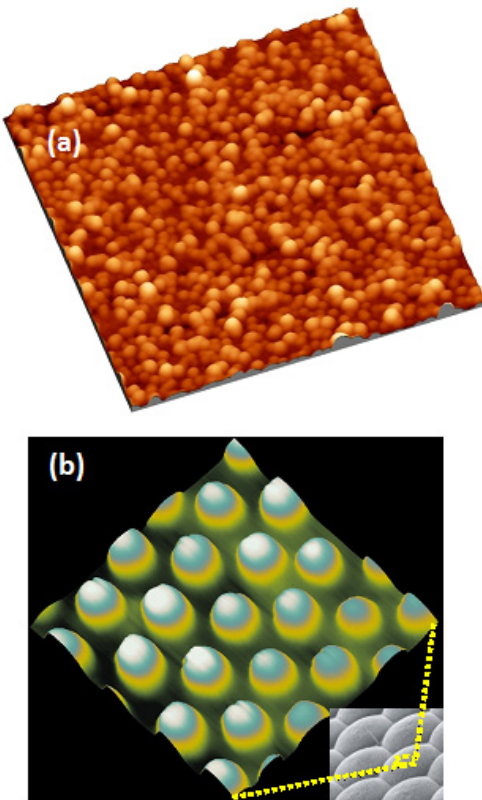
Irrespective of these issues, the colloid probe [8-11, 13] is widely used in van der Waals/Casimir force measurements because one avoids parallelism problems in the plane-plane geometry traditionally known for this force as discussed in the seminal paper by H. Casimir in 1948 [14].



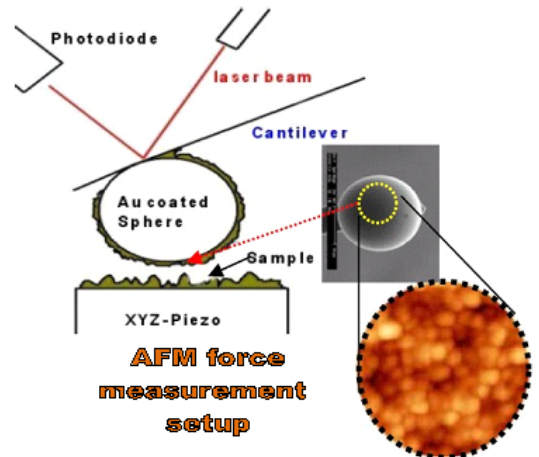
**FIGURE 2** (a) Under ideal experimental conditions (e.g. in high/ultrahigh vacuum) as the cantilever tip approaches the sample surface then attractive van der Waals (vdW) forces (or at larger distances Casimir forces) start acting on it. Upon contact a short range repulsive force starts acting on the tip due to overlap of atomic orbitals. As the inset shows in air additional attractive forces can act on the tip due to formation of a capillary meniscus. (b) Schematic illustration of operation in Lift-ModeTM.

Nowadays fluctuation-induced electromagnetic (EM) forces, which are the van der Waals (vdW)/Casimir forces [14-17], between neutral bodies at submicrometer proximity become increasingly evident and important in many physicochemical applications. Following Casimir's famous calculation between perfect reflecting mirrors [15], Lifshitz and co-workers in the 50's [16] considered the more general case of real dielectric plates by exploiting the fluctuation-dissipation theorem, which relates the dissipative properties of the plates (*optical absorption from many microscopic dipoles*) and the resulting EM fluctuations at equilibrium. The vdW force is the short-distance asymptote where the retardation of EM interactions is neglected (sepa-

ration  $< 10$  nm), while the Casimir force is realized at larger distances where retardation is significant. In any case, the dependence of the vdW/Casimir force on materials is critically important since one can tailor the force by engineering the boundary conditions of the EM field with a suitable choice of materials [13, 17]. In any case, at short separations between real materials (typically less than 100 nm), the vdW/Casimir force is strongly influenced by surface roughness and the material's optical properties via the frequency-dependent dielectric function  $\epsilon(\omega)$  [13, 17]. Here the theoretical calculations, using as input real measured optical and morphology data, are compared to force data down to 12 nm separations (*limited by jump-to-contact*), which is the best measurement done using AFM up to this date. Based on the extrapolation to the point upon contact  $d=d_0$  we obtain a force  $F_{\text{vdW/Casimir}} \sim 50$  nN (from effective interaction area  $\sim (2\pi/3) d_0 R \sim 1 \mu\text{m}^2$ ). Extrapolating on macroscopic areas one obtains for the contact force the equations above<sup>1</sup>.



**FIGURE 3** (Tapping mode AFM topography images. (a) Cu nanoparticles on silicon oxide substrates (scan size 1  $\mu\text{m}$ ). (b) Nano-nipple structure (antireflective surface) of a moth eye [19].



**FIGURE 4** Sphere-plane geometry. Often the sphere is coated with suitable materials for measurements (e.g., gold). The separation distance is  $d=d_p-d_{\text{defl}}+d_0$  with  $d_p$  the piezo movement (Fig. 4),  $d_{\text{defl}}$  the deflection of the cantilever upon contact with respect to zero tension state, and  $d_0 (>0)$  the distance upon contact due to surface roughness.



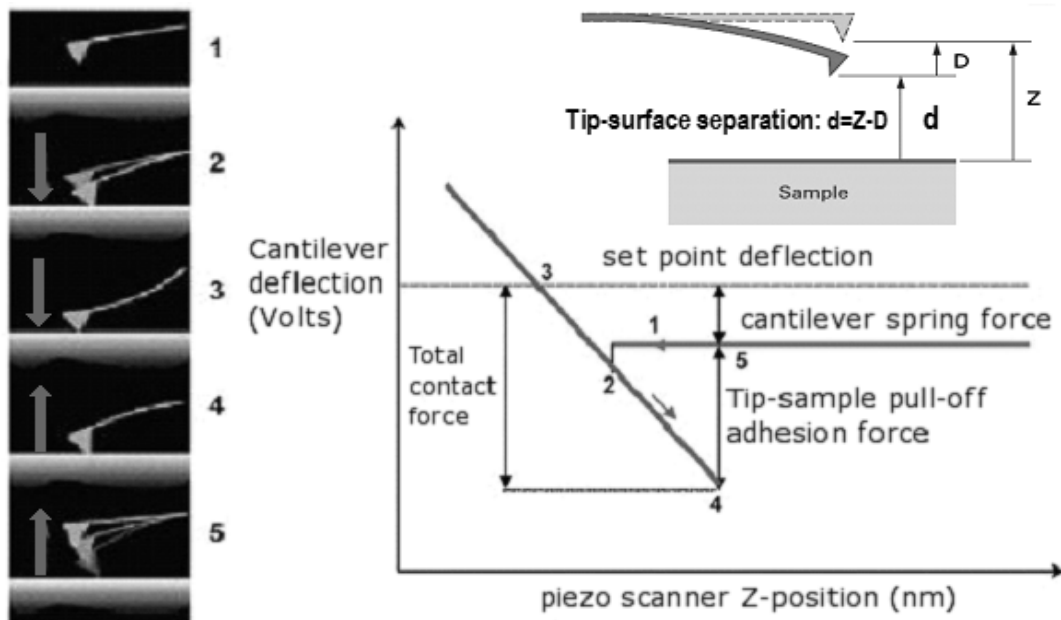
<sup>1</sup>For an area  $\sim 1 \text{ m}^2$ :  $F_{\text{vdW/Casimir}} \sim 5 \times 10^4 \text{ N}$   
 $\sim 5 \times 10^3 \text{ Kg}$  (5 tons!; 1 Kg  $\sim 10 \text{ N}$ )

For area  $\sim 1 \text{ cm}^2$  ( $\sim 1 \text{-cent}$ ):  $F_{\text{vdW/Casimir}} \sim 5 \text{ N}$   
 $\sim 1/2 \text{ Kg}$

The vdW/Casimir force with its origin in quantum fluctuations has been demonstrated unequivocally, but not yet in a manner that is controlled and exploited by mankind. If we look to nature, the most remarkable example of vdW/Casimir adhesion are the geckos – nature’s best climbers. The mechanisms underlying geckos’ remarkable climbing ability had remained a mystery since Aristotle first observed it in the 4th century B.C. From all suggested mechanisms only capillary and vdW adhesion forces survived after 1969. Finally in 2002 it was concluded that the vdW force

is the major adhesion force. In any case, this natural superadhesion system opened the doors for engineers to fabricate gecko-inspired synthetic adhesives. The basis for geckos’ adhesion is in the millions ( $\sim 10^6$ ) of microscale setae on each toe that form a dry adhesive. The tip of each seta consists of 100 - 1000 spatulae of size 100 nm in diameter yielding an adhesive Casimir/vdW force of 100 - 300 nN [19]. If all  $\sim 10^9$  setae of one gecko toe are attached simultaneously, this would correspond to a force up to 100-300 Newton [19]. Although our estimations from Fig.6a indicate vdW/Casimir pressures (force/area) upon contact (for total RMS roughness 3 nm and effective surface interaction area  $\sim 1 \mu\text{m}^2$ ) which are lower than the gecko’s, it is expected to approach the gecko’s numbers for a surface roughness  $< 1 \text{ nm}$ .

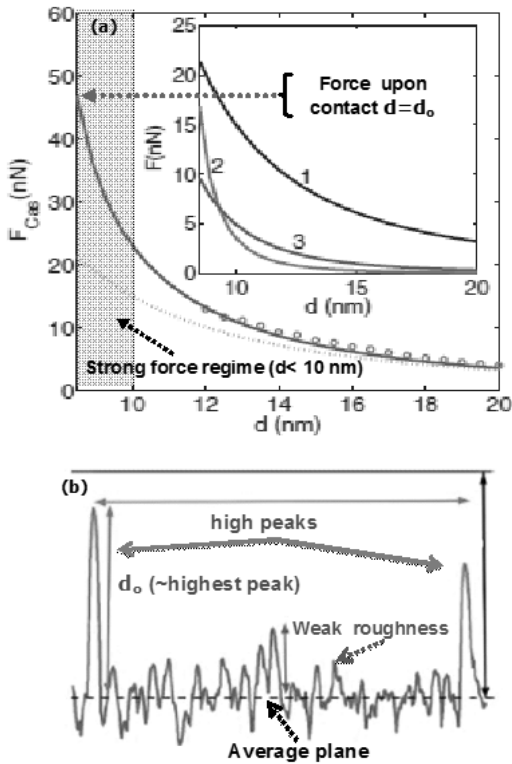
In summary, the AFM is a powerful imaging tool to provide topography information of surfaces with nanoscale resolution (and under certain conditions



**FIGURE 5** Force distance curves. The approach (red) and withdraw (blue) curves are shown on the right. The total contact force is dependent on the adhesion as well as the applied load. The upper inset shows the deflection of a cantilever caused by tip-sample forces.

atomic resolution), but it is also a tool to measure, besides electromagnetic properties, surface force, providing valuable information about the interaction state of matter. Especially the force results from Casimir/van der Waals force interactions, if accurate

enough (1 % level), can further progress the investigations of fundamental physics in search of hyperforces beyond the standard model•



**FIGURE 6** (a) vdW/Casimir force between a sample with RMS roughness  $w = 1.3$  nm, and a sphere ( $R=10.1 \mu\text{m}$ ) with RMS roughness  $w_{sph} = 1.8$  nm. Dotted line is the force without roughness (Lifshitz theory [16]). Circles are AFM force measurements by AFM down to 12 nm separation limited by jump to contact to  $d=d_0$  ( $=7.5$  nm) [11]. Inset: (1)-force without roughness (Lifshitz theory), (2)-contribution of high surface peaks, and (3)- perturbative force part (weak roughness contribution around the average plane) [14]. (b) Rough surface profile from AFM data to clarify the distance upon contact  $d_0$ . Two interacting rough surfaces (e.g. in Fig.4) are presented by one rough and the another flat [16].

## Referenties

- [1] G. Binnig and H. Rohrer, *Sci. Am.* 253, 50 (1985)
- [2] G. Binnig and C. F. Quate, Ch. Gerber, *Phys. Rev. Lett.* 56, 930 (1986); US Pat. 4724318.
- [3] R. Garcia and R. Perez, *Surf. Sci. Rep.* 47, 197 (2005)
- [4] F. J. Giessibl, *Rev. Mod. Phys.*, Vol. 75, 949 (2003).
- [5] H.-J. Butt, B. Cappella, M. Kappl, *Surface Science Reports* 59, 1-152 (2005).
- [6] O. Ergincan, G. Palasantzas, and B. J. Kooi, *Phys. Rev. B* 85, 205420 (2012); O.Ergincan, G. Palasantzas, and B. J. Kooi, *Appl. Phys. Lett.* 101, 061908-1 (2012)
- [7] W. Melitz, J. Shen, A. C. Kummel, S. Lee, *Surface Science Reports* 66, 1 (2011)
- [8] P.J. van Zwol, G. Palasantzas, M. van de Schootbrugge, J. Th. M de Hosson, V. S. J. Craig, *Langmuir* 24, 7528 (2008).
- [9] P.J. van Zwol, G. Palasantzas, J. Th. M de Hosson, *Phys. Rev. E* 79, 041605 (2009)
- [10] P.J. van Zwol, G. Palasantzas, J. Th. M. DeHosson, *Phys. Rev. B* 77, 075412 (2008).
- [11] P.J. van Zwol, G. Palasantzas, M. van de Schootbrugge, J. Th. M. De Hosson, *Appl. Phys. Lett.* 92, 054101 (2008).
- [12] Wijnand Broer, George Palasantzas, and Jasper Knoester, Vitaly Svetovoy, *Phys. Rev. B* 85, 155410 (2012); W. H. Broer, G. Palasantzas, J. Knoester and V. B. Svetovoy, *Europhysics Letters*, 95, 30001 (2011)
- [13] S.K. Lamoreaux, *Phys. Rev. Lett.* 78, 5 (1997); S.K. Lamoreaux, *Rep. Prog. Phys.* 68, 201 (2005); H. B. Chan et al., *Phys. Rev. Lett.* 87, 211801 (2001); H. B. Chan et al., *Science* 291, 1941 (2001); G. Torricelli, I. Pirozhenko, S. Thornton, A. Lambrecht and C. Binns, *Europhys. Lett.* 2011, 93, 51 001.
- [14] H.B. Casimir, *Proc. K. Ned. Akad. Wet.* 51, 793 (1948)
- [15] S. K. Lamoreaux, *Phys. Today* 60, 40 (2007); A. Lambrecht, *Nature* 454, 836 (2008); A. W. Rodriguez, F. Capasso, and S. G. Johnson, *Nature Photonics* 5, 211 (2011); V. A. Parsegian, *Van der Waals Forces*, (2006)
- [16] E.M. Lifshitz, *Sov. Phys. JETP* 2, 73 (1956); I.E. Dzyaloshinskii, E. M. Lifshitz, L. P. Pitaevskii, *Sov. Phys. Usp.* 4, 153(1961)
- [17] G. Torricelli et al. *Phys. Rev. A* 82, 010101(R) (2010); *Advanced Functional Materials* 22, 3729 (2012)
- [18] <http://robotics.eecs.berkeley.edu/~ronf/Gecko/index.html>; K. Autumn et al., *PNAS* 99, 12252 (2002).
- [19] D. G. Stavenga S. Foletti, G. Palasantzas, K. Arikawa, *Proc Roy Soc B* 273:661 (2006)



Jouw persoonlijke ontwikkeling staat centraal bij Talent&Pro.



*“Bij Talent&Pro krijg ik de kans om mezelf continu te verbeteren.”*

*Mitchel Bouwmeester, Talent*

## Werken met cijfers: dát is wat je leuk vindt!

Formules uitpluizen en berekeningen maken. Je kunt met jouw bèta-achtergrond als onderzoeker of docent aan de slag, maar met jouw probleemoplossend vermogen kom je ook als geroepen voor de financiële sector.

Als actueel specialist van Talent&Pro los je complexe vraagstukken op voor grote financiële instellingen, zoals ASR, ABP of SNS Reaal. Je werkzaamheden variëren van het bepalen van premietarieven tot het analyseren van risico's.

Zo ontwikkel je jezelf snel van Talent tot Professional. De functie van actuaaris is niet voor niets al 4 jaar op rij tot 'beste baan van Nederland' gekozen door Elsevier en SEO Economisch Onderzoek!

Kies ook voor een goed begin van je carrière! Bekijk onze vacatures op [talent-pro.com](https://talent-pro.com) en solliciteer.

**Schut Geometrische Meettechniek** is een internationale organisatie met vijf vestigingen in Europa en de hoofdvestiging in Groningen. Het bedrijf is ISO 9001 gecertificeerd en gespecialiseerd in de ontwikkeling, productie en verkoop van precisie meetinstrumenten en -systemen.

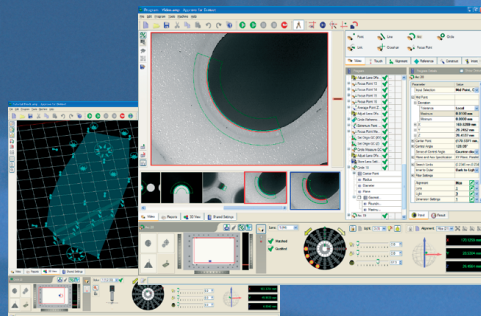
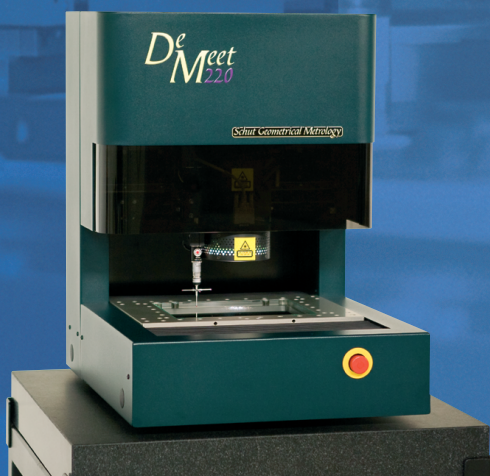
Aangezien we onze activiteiten uitbreiden, zijn we continu op zoek naar enthousiaste medewerkers om ons team te versterken. Als jij wilt werken in een bedrijf dat mensen met ideeën en initiatief waardeert, dan is Schut Geometrische Meettechniek de plaats. De bedrijfsstructuur is overzichtelijk en de sfeer is informeel met een "no nonsense" karakter.

Op onze afdelingen voor de technische verkoop, software support en ontwikkeling van onze 3D meetmachines werken mensen met een academische achtergrond. Hierbij gaat het om functies zoals **Sales Engineer**, **Software Support Engineer**, **Software Developer (C++)**, **Electronics Developer** en **Mechanical Engineer**.

Er zijn bij ons ook mogelijkheden voor een technisch interessant **stage-** of **afstudeerproject**. Dit kan in overleg met de docent worden afgestemd.

Open sollicitaties zijn ook zeer welkom. Voor echt talent is altijd ruimte.

Voor meer informatie kijk op [www.Schut.com](http://www.Schut.com) en [Vacatures.Schut.com](http://Vacatures.Schut.com), of stuur een e-mail naar [Sollicitatie@Schut.com](mailto:Sollicitatie@Schut.com).



**APPROVE**  
for De Meet

