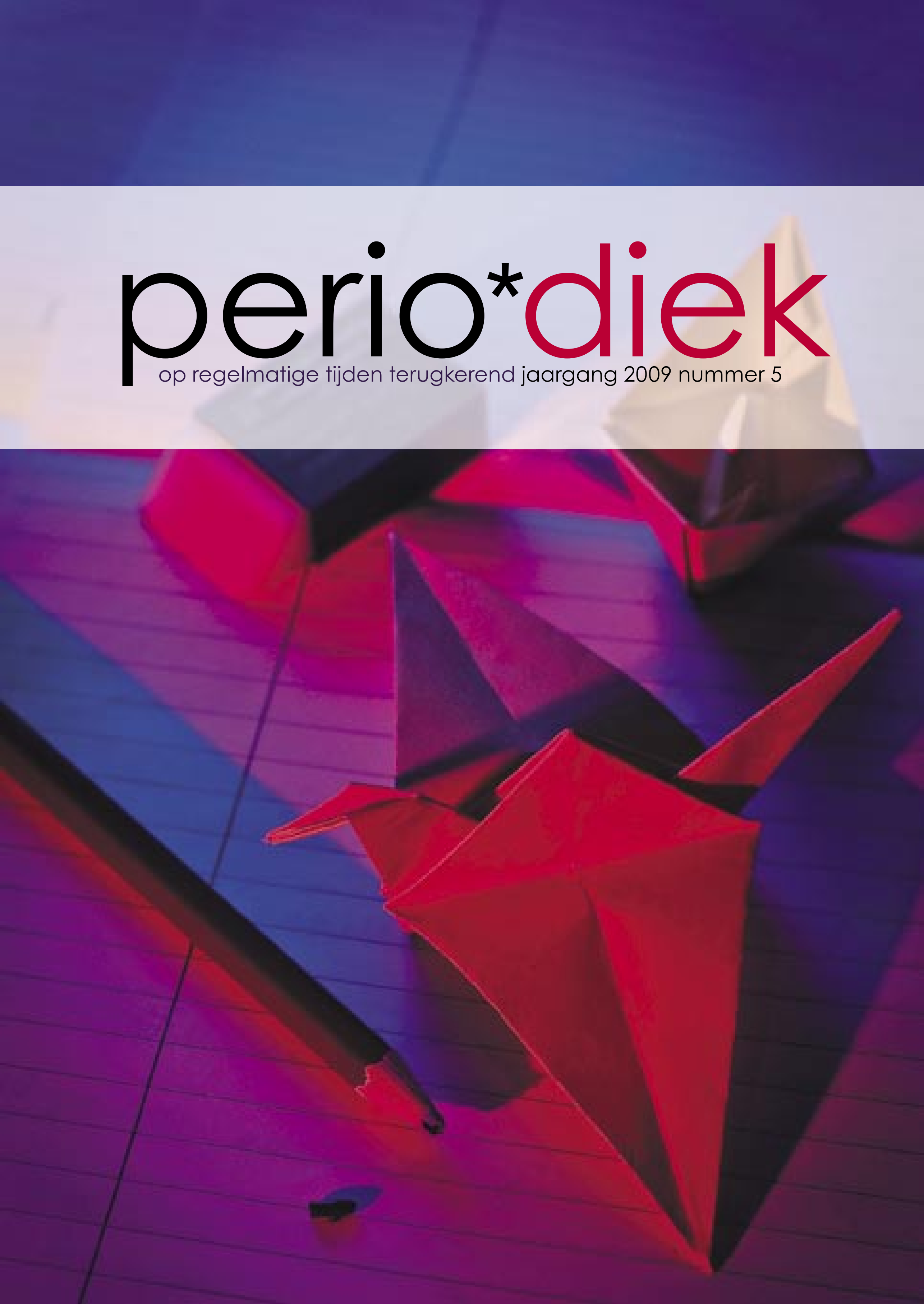
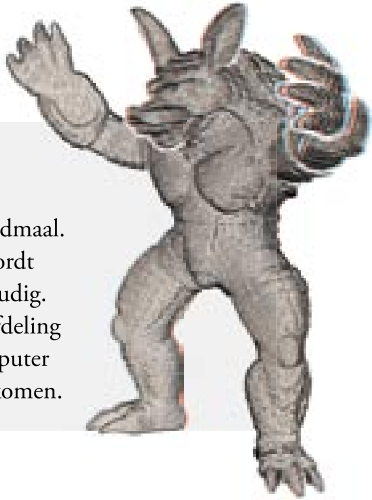
# perio*diek

op regelmatige tijden terugkerend jaargang 2009 nummer 5



# Inhoud

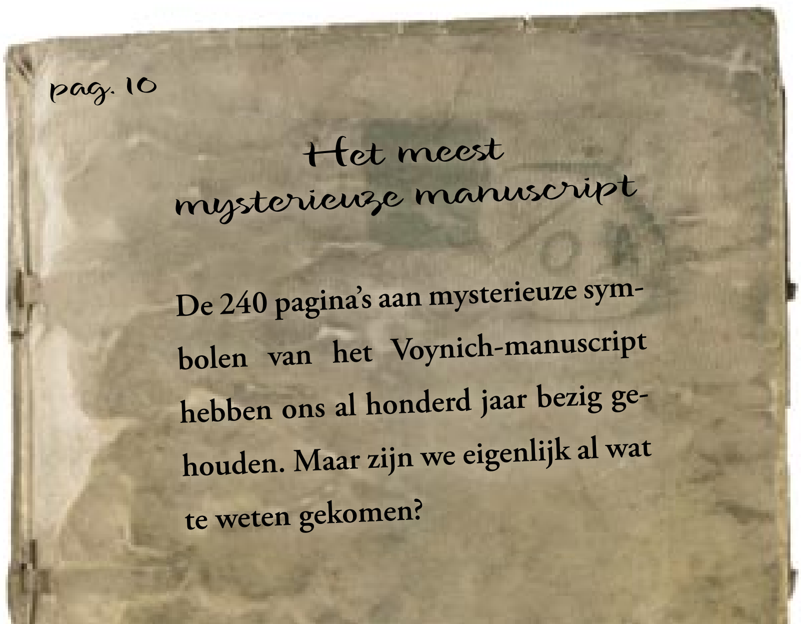






## En verder





**14 Kraanvogels en complexe getallen**

Vouwkunsten vermaken ons in alle soorten en maten terwijl we eigenlijk nuttig bezig moeten zijn. Maar de kunst van de origami heeft als mooie bijkomstigheid wat nuttige toepassingen.

pag. 30

**Kunst ∩ Wetenschap**

Kunst en wetenschap worden meestal gezien als elkaars tegenpolen, maar dat is misschien niet helemaal terecht: hoewel de manier van denken verschilt, kan de combinatie verrassend zijn.

# Van de redactie

Omdat dit de allereerste Periodiek is waar ik aan mee mag werken, is mij de eer gegund om de eerste woorden te schrijven.

Toen ik eindelijk na pak 'm beet drie weken de NSFW ontdekte – voor een eerstejaars is hij goed verstopt – dacht ik nog dat studieverenigingen uit stoffige mensen bestonden die alleen maar boeken voor je regelden. Maar al snel zat ik daar elke pauze. Van commissies had ik op dat moment geen idee, tot ik de laatste Periodiek van het vorige collegejaar meekreeg.

Tijdens het lezen van de perio merk je al gauw dat een introductievak als mechanica maar weinig zegt over de vage maar interessante dingen die je nog gaat leren en doen. Mede hierdoor zat ik voor ik het wist bij de perioredactie. Maar ik merkte al snel tijdens mijn eerste perioweekend dat het reviewen van een stuk over origami langzaam gaat als je pas vier weken geleden voor het eerst kennis hebt gemaakt met complexe getallen. En vooral als de LaTeX-codes, InDesign-termen en zwermen aan komma's je om de oren vliegen, begin je je af te vragen of dit wel een geschikte commissie voor een eerstejaars is. Maar zodra je een leesbare Periodiek tevoorschijn ziet komen, weet je weer dat dit een prestatie is waar je deel van wilt uitmaken.

— *Ronniy*

# Colofon

**Redactie** Monique van Beek, Thomas ten Cate, Ronniy Joseph, Ellen Schallig, Pjotr Svetachov, Marten Veldthuis, Erik Weitenberg

**Scribenten** Roel Andringa, Marije Bakker, Anneroos Everts, Leo de Ruijsscher, Job van der Zwan

**Met dank aan** Maarten Everts, Pim Puylaert

**Adverteerders** Technolution (pag. 20), Schut (pag. 40)

Ook adverteren? Neem contact op met bestuur@fmf.nl.

**Oplage** 1300 stuks

**Druk** Scholma

**ISSN** 1875-4546

**De Periodiek** is een uitgave van de Fysisch-Mathematische Faculteitsvereniging en verschijnt vijf keer per jaar. Eerder uitgebrachte Periodieken zijn na te lezen op perio.fmf.nl. De redactie is te bereiken via perio@fmf.nl.

# In het nieuws

## Het spraakgen

Dat de apen onze evolutionaire broers zijn, is sinds Darwin bekend. Maar sinds kort is ook bekend welk gen waarschijnlijk het fundament heeft gelegd voor de 6800 talen die op deze wereld gesproken worden. Het gen, genaamd FOXP2, was al ontdekt in 2001, maar onlangs is bewezen dat een miniem verschil van twee aminozuren in dit gen al snel tot een gebrek aan taalvaardigheid leidt. Het onderzoek keek naar het gen bij zowel mensen als chimpansees en vond daar het kleine verschil. Dit zorgt voor een andere ontwikkeling in de hersenen. Nu wil men nog kijken op welke plek in de hersenen deze genen tot uiting komen.

nature.com

## Super Size Waste

Wisten we al dat Amerikanen de laatste decennia steeds meer zijn gaan eten, nu wordt ook duidelijk dat ze gigantisch veel meer voedsel zijn gaan verspillen. Door conventionele onderzoeksmethoden (zoals vragenlijsten) werd de omvang van dit probleem nog niet zo duidelijk, omdat sommige methoden onnauwkeurig zijn en andere methoden niet geografisch allesomvattend. Nu is een methode ontwikkeld die het heel anders aanpakt: deze gaat uit van de hoeveelheid beschikbare calorieën tegenover wat daadwerkelijk geconsumeerd wordt. Het verschil is wat verloren gaat als afval. Hieruit blijkt dat bijna veertig procent van al het voedsel in Amerika nooit de inwendige mens heeft kunnen plezieren.

sciencenow.sciencemag.org

## Tientallen protonen omgekomen bij botsing

Slechts tien dagen na de herstart heeft de Large Hadron Collider al een wereldrecord in handen. Het is nu 's werelds krachtigste deeltjesversneller: er zijn protonen gemeten met een energie van 1,18 TeV. Het vorige record stamt uit 2001 en was 'slechts' 0,98 TeV. En er is nog meer nieuws over de LHC: op 23 november werden ook voor het eerst de twee protonenbundels tegen elkaar in gestuurd en werden de eerste botsingen gemeten. Reden voor een feestje? Natuurlijk, maar er moet nog veel gebeuren voordat de LHC voor onderzoek kan worden ingezet.

press.web.cern.ch

## Doemswolk

In vele heuvelachtige gebieden wordt de laatste tijd een bijzonder wolkenfenomeen waargenomen. De nieuwe wolk wordt wel de *undulatus asperatus* genoemd, oftewel turbulente golving, en het is niet moeilijk te zien waarom. De wolk ziet er van onderen uit als een rimpeling in water. De voorzitter van de Cloud Appreciation Society in Groot-Brittanië, Gavin Pretor-Pinney, beweert dat de wolk gevormd wordt door warme, vochtige lucht boven de wolk en koude, drogere lucht onder de wolk. De rimpelingen worden dan gevormd door een stevige wind over het heuvellandschap. Hoewel de wolk natuurlijk al langer bestaat, is hij niet opgenomen in de internationale wolkenatlas. Gebeurt dit wel, dan zal dit de eerste nieuwe wolk zijn in vijftig jaar die wordt toegelaten.

wired.com

## Wèèèèèh!

Muziek, melodie en intonatie blijken de eerste dingen te zijn waar een kind mee te maken krijgt. Een groep onderzoekers in Leipzig heeft van dertig Franse en dertig Duitse baby's van twee tot vijf dagen oud het huilen opgenomen. Het blijkt dat de Franse baby's voornamelijk stijgende huilgeluiden maken en de Duitse baby's vooral dalende. De meest voor de hand liggende uitleg is dat het verschil komt door het verschil tussen de talen die baby's meekrijgen als ze nog ongeboren zijn.

mpg.de

# Leuke nieuwtjes uit de wondere wereld der wetenschap

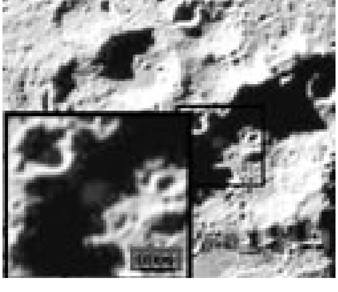
## Googlebrein

Binnenkort kunnen we een nieuwe groep mensen verwachten op het internet, namelijk de ouderen. Onderzoekers in de VS ontdekten dat de gedeelten van het brein die te maken hebben met het nemen van beslissingen en redeneren meer gestimuleerd worden op het internet. Het onderzoek werd uitgevoerd op een groep van 24 mensen tussen de 55 en 78 jaar. De mensen met weinig internet-ervaring vertoonden een aanzienlijke verhoging van activiteit in die gedeelten van hun hersenen na slechts 7 dagen 1 uur per dag op het internet naar informatie te zoeken.

medicalnewstoday.com

## Toch water op de maan

In tegenstelling tot onze beweringen over kurkdroge manen in de vorige Periodiek hebben wetenschappers toch in grotere hoeveelheden water op de maan gevonden. Door een sonde op de zuidpool van de maan te laten neerstorten ontstond er een stofwolk, die met een spectrometer werd geanalyseerd. Er is ongeveer 100 kilogram water gevonden, en dit allemaal uit een 20 meter grote krater die de sonde achterliet. Water op de maan vergroot de mogelijkheid van een maanbasis in de toekomst. Verder zou het gebruikt kunnen worden als brandstof voor raketten die op waterstof werken.



space.com

## Japanse namaak

Als het te ver weg is dan maak je het maar na, was waarschijnlijk de instelling van de Japanners die de omgeving van een zwart gat hebben nagebootst. Het recept: richt hoog-energetische lasers op een plastic buisje, en laat vervolgens de vrijkomende straling invallen op een buisje silicium. Het resultaat is dan een bol plasma die onmiddellijk verandert in een bron röntgenstraling, zoals bij een zwart gat. Hierdoor krijgen wij hier op aarde hopelijk een beter begrip van de processen rond verre zwarte gaten.

sciencenow.sciencemag.org

## Waarom stikken eng is

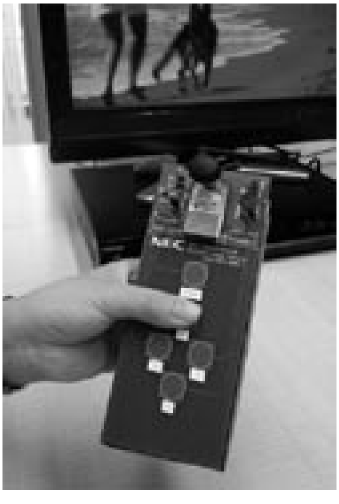
Als je teveel $CO_2$ inademt, ga je dood door verstikking. Mensen raken in paniek als ze veel van dit gas inademen. Maar waarom? $CO_2$ is toch kleur-, reuk- en smaakloos? Hoe weet je dan dat je teveel van dat gas binnenkrijgt? Een van de redenen is dat het inademen van $CO_2$ chemische sensoren in het angstcentrum in de hersenen activeert. Deze vinding zou ook de andere kant op kunnen werken: door delen van dat centrum te behandelen, zouden paniekstoornissen bij mensen verleden tijd kunnen zijn.

sciencenow.sciencemag.org

## Afstandsbediening zonder batterijen

Word jij ook zo moe van al dat opstaan en naar de tv lopen omdat de batterij van de afstandsbediening weer eens leeg is? Binnenkort is dat gelukkig nooit meer een probleem, dankzij de nieuwe ontwikkelingen van de Japanse bedrijven NEC en Soundpower, helden in het onderhouden van de luie manier van leven. De nieuwe afstandsbediening die zij ontwikkeld hebben, zal de nodige energie putten uit het indrukken van de toetsen. Helaas is het nog even wachten: dit model afstandsbediening zal waarschijnlijk pas in 2011 op de markt zal komen.

tweakers.net



# Uit het onderzoek

## *Spaghetti ontward*

DOOR **PJOTR SVETACHOV**

Het is een bekend probleem. Je doet een onderzoek en daaruit stroomt een ware tsunami aan gegevens. Om deze te kunnen analyseren, om patronen te ontdekken of tot nieuwe inzichten te komen, is het van groot belang om een handige manier te hebben om deze gegevens weer te geven.

Scientific Visualization and Computer Graphics (SVCG) is een onderzoeksgroep binnen informatica die zich onder meer richt op het visualiseren van grote hoeveelheden gegevens. Dit moet op zo'n manier gebeuren dat de visualisatie nuttig is voor de eindgebruiker.

Een voorbeeld van zulke gegevens is een verzameling van lijnen. Er zijn veel onderzoeksgebieden waar men hiermee werkt. Zo is het vaak nodig om de voortgang van deeltjes te traceren. Denk bijvoorbeeld aan simulaties van het voortbewegen van lucht, vloeistof of sterren. Ook binnen het medisch vakgebied wordt met verzamelingen lijnen gewerkt, namelijk bij tractografie. Door gebruik te maken van Diffusion Tensor Imaging (DTI) kan men de diffusie van water in de hersenen meten. Omdat water zich vooral langs axonen (uitlopers van neuronen, en de primaire elementen van informatieoverdracht in het zenuwstelsel) verspreidt, kan men zo de axonen in kaart brengen en kijken welke axonen aan elkaar gekoppeld zijn. Zo kan een 'architectuur' van de hersenen gereconstrueerd worden. Deze bestaat uit paden die ook wel *fiber tracts* genoemd worden.

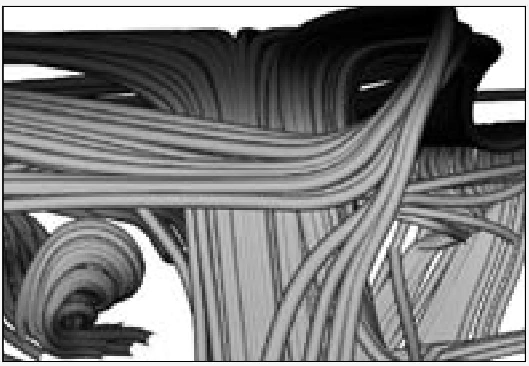
### Spaghetti

Het is dus belangrijk om een groep lijnen goed te visualiseren. Dit blijkt niet zo triviaal. Zoals eerder gezegd moet het eindresultaat ook nuttig zijn. In dit geval is het belangrijk dat de structuur goed te zien is.

Als men alleen de lijnen tekent, ontstaat er gewoon spaghetti. Er is dan geen structuur te zien, hoe je het beeld ook draait. Je ziet namelijk niet meer welke lijnen voor of achter andere lijnen lopen; zie figuur 1.

Bij DTI worden deze lijnen meestal als buizen weergegeven, zoals in figuur 2. Hier ontstaat echter een ander probleem, omdat deze buizen meestal dik moeten

**FIGUUR 1** Lijnen



**FIGUUR 2** Buizen

zijn om ze goed te kunnen zien. Dit zorgt ervoor dat je niet veel lijnen tegelijk kunt zien en je belangrijke structuur mist.

## Terug naar het begin

Binnen SVCG zijn Maarten Everts, Henk Bekker, Jos Roerdink en Tobias Isenberg met een methode gekomen om dit probleem op te lossen. Als inspiratie heeft men gekeken naar zwart-wit tekeningen uit oude boeken. Hoewel deze maar twee kleuren hebben, wist men toch een goed beeld te creëren. De tekenaar weet waar hij moet abstraheren en waar hij de nadruk op moet leggen. Als bijvoorbeeld een bundel lijnen samenkomt, wordt dit als één bundel getekend in plaats van allemaal dunne lijntjes.

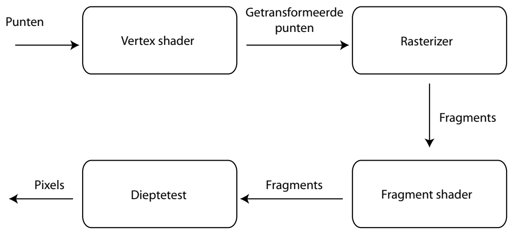
Een veelgebruikte manier om iets te abstraheren is om er een witte rand omheen te tekenen. Zo'n halo zorgt ervoor dat het omlijnde object meer opvalt. Als je nu om elk lijntje in figuur 1 een halo tekent krijg je als resultaat figuur 3. Je kunt nu al wel wat structuur zien, maar je hebt nog hetzelfde probleem als met de buizen: de halo's zitten te veel in de weg en zorgen ervoor dat er veel detail verloren gaat.

Hier is een oplossing voor bedacht: *depth-dependent halos*. Lijnen die op dezelfde afstand liggen van het oogpunt zullen kleinere halo's krijgen zodat ze elkaar minder sterk overlappen. In figuur 4 is het resultaat te zien.

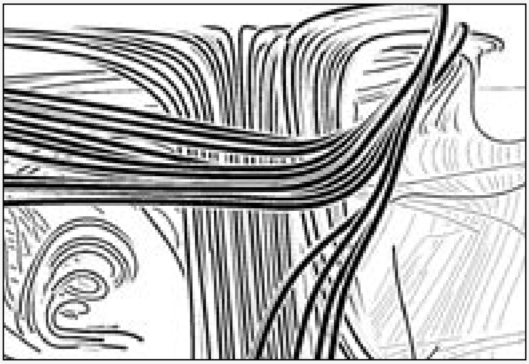
## Technische realisatie

Er is nu een methode bedacht, maar hoe wordt deze dan geïmplementeerd? Hiervoor wordt de kracht van de grafische kaart van een computer ingeschakeld.

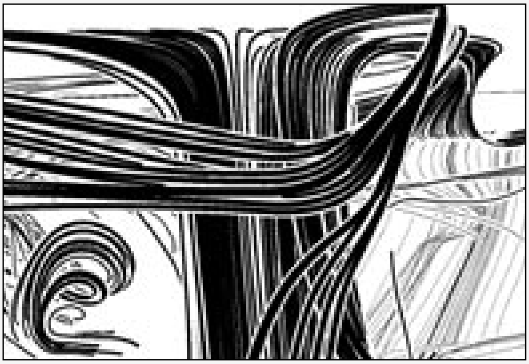
Een grafische kaart werkt ongeveer als volgt (figuur 5). De centrale processor stuurt data naar de kaart om te tekenen. Deze data kan bestaan uit punten, lijnen (begin- en eindpunten) of driehoeken (drie punten). Alle punten die binnenkomen op de grafische kaart gaan eerst door een *vertex shader*. Binnen de vertex shader kan de programmeur ervoor kiezen om de positie van de punten nog te veranderen. Daarna wordt alles omgezet naar *fragments* door de *rasterizer*. Deze fragments corresponderen met de pixels op het beeldscherm. Elk



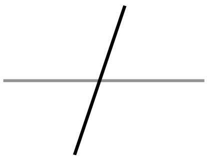

**FIGUUR 5** De werking van de grafische kaart.



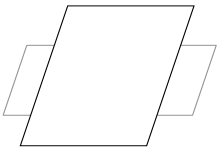
**FIGUUR 3** Halos



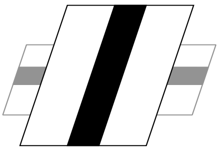
**FIGUUR 4** Depth-dependent halos



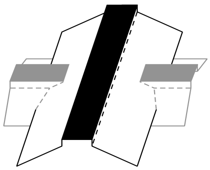
**a.** Twee lijnen



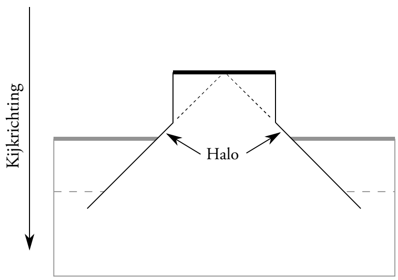
**b.** Twee polygonen



**c.** Polygonen met halo

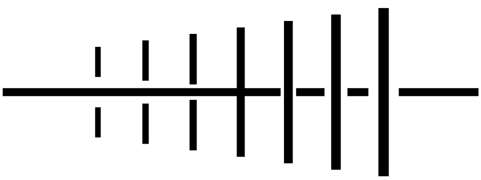


**d.** Depth-dependent halo




**e.** Van de zijkant gezien

**FIGUUR 6** De werking van het algoritme



**FIGUUR 7** Lijnen met verschillende afstand krijgen verschillende halo's ten opzichte van elkaar

fragment heeft onder andere een kleur en een diepte. Ze gaan nu eerst door een *fragment shader*, waar de programmeur er weer voor kan kiezen om er bewerkingen op te doen. Daarna ondergaan de fragments een dieptetest. Hier wordt gekeken welke fragments overlappen en welke dus wel of niet zichtbaar zijn.

De truc is nu om goed gebruik te maken van de vertex en fragment shaders. De grafische kaart heeft namelijk veel kleine processoren die samen voor dit soort operaties veel sneller zijn dan de CPU. Je moet ze echter wel allemaal tegelijk bezig weten te houden om alle rekenkracht te benutten.

De werking van het algoritme achter depth-dependent halos is te zien in figuur 6, met als voorbeeld twee lijnen. Voor elke lijn die getekend moet worden, stuurt de CPU een polygoon naar de grafische kaart. Het polygoon is zo smal dat het op een lijn lijkt (figuur 6a). In de vertex shader wordt het polygoon breder gemaakt en naar de camera gedraaid (figuur 6b). In de fragment shader krijgt elk fragment een kleur afhankelijk van de afstand tot de oorspronkelijke lijn. Fragments in het midden worden zwart gekleurd en aan de rand wit; dit zorgt voor de halo (figuur 6c). Daarnaast wordt nog iets uiterst belangrijks gedaan: de diepte van het fragment wordt een beetje aangepast. Hoe verder weg het fragment is van het midden van de lijn, hoe verder het naar achteren wordt verschoven (figuur 6d en 6e). Het effect dat hiermee wordt bereikt is precies wat we wilden: overlappende lijnen die op dezelfde afstand liggen van het oogpunt krijgen ten opzichte van elkaar kleinere halo's. Dit is te zien in figuur 7.

## Meer mogelijkheden

Deze techniek blijkt niet alleen met lijnen goed te werken. Soms heb je namelijk een dataset met alleen maar punten, bijvoorbeeld als uitvoer van een 3D laserscanner. Van deze punten wordt normaalgesproken een 3D model gereconstrueerd. Maar nu blijkt dat je, door deze punten met depth-dependent halo's te tekenen, een goed resultaat kunt krijgen zonder er eerst een 3D model van te maken; zie figuur 8.

Omdat het hele beeld zwart-wit is, kan men nu ook makkelijk stereoscopische beelden genereren. Het beeld wordt dan twee keer getekend, een keer voor elk oog (dus met een kleine verplaatsing van het oogpunt). Het ene beeld wordt in rood getekend en het andere in cyaan/blauw. Deze twee beelden worden dan over elkaar heen gelegd, zodat je met een anagliefbril het resultaat in 3D kunt zien.

De onderzoeksgroep heeft nu een prettige methode ontwikkeld om fiber tracts te visualiseren (figuur 9). De volgende stap is nu om complexe zaken zoals hersenen of tumoren ook op dergelijke zwart-wit manier weer te geven. Dit zou een belangrijke ontwikkeling kunnen betekenen in bijvoorbeeld neurologie, waar dit soort technieken tot meer begrip van het mysterie van de hersenen kunnen leiden. •

**FIGUUR 8** Puntdata gevisualiseerd met behulp van depth-dependent halos

## Referenties

[1] M.H. Everts, H. Bekker, J.B.T.M. Roerdink, T. Isenberg, 2009, "Depth-Dependent Halos: Illustrative Rendering of Dense Line Data." IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, vol. 15, no. 6.

**FIGUUR 9** Fiber tracts

# Het meest mysterieuze manuscript

DOOR **THOMAS TEN CATE**

“Het Voynich-manuscript.” Je zou bijna denken dat het om een roman van Dan Brown gaat. Dat is niet zo, maar het verhaal achter “het meest mysterieuze manuscript ter wereld” is er niet minder spannend om: zowel de oorsprong als de betekenis van het manuscript zijn in nevelen gehuld.

Het Voynich-manuscript is genoemd naar de Poolse boekhandelaar en antiquair Wilfrid Voynich die het in 1912 gekocht heeft. Het bestaat uit zo’n 240 pagina’s perkament, beschreven met een ganzenveer in een onbekend alfabet. Vele gekleurde illustraties van onder andere planten en sterrenkaarten staan temidden van de tekst. De illustraties zijn de enige aanwijzing richting de betekenis van het manuscript: tot op heden is nog niemand erin geslaagd om de tekst te ontcijferen.

Wilfrid Voynich

Dit artikel is het eerste van een tweedelige serie. In deze Periodiek zullen we het verhaal achter het manuscript uit de doeken doen. In de volgende Periodiek zullen we in de schoenen van een cryptoanalyst stappen en kijken wat er over de tekst te ontdekken valt.

## Een geschiedenis vol gaten

Voynich kocht het manuscript in 1912 van een jezuïtische kostschool in de buurt van Rome. De jezuieten verkochten noodgedwongen een verzameling manuscripten omdat ze geen geld hadden voor het opknappen van de historische villa waar de school was ondergebracht. Vanzelfsprekend wilden ze aan dit geldgebrek geen ruchtbaarheid geven, wat de reden is dat Voynich geheimhouding moest beloven. Hij hield zich aan zijn belofte in de hoop vaker zaken te kunnen doen.

Voynich stierf in 1930 en liet het manuscript na aan zijn vrouw Ethel, de dochter van de beroemde wiskundige en filosoof George Boole. Na haar dood belandde het manuscript via-via bij de bibliotheek van de universiteit van Yale, waar het nu nog wordt bewaard [1].

Wilfrid Voynich probeerde naarstig om de oorsprong van zijn nieuwe aanwinst te achterhalen. Aan het manuscript was een brief gehecht, gedateerd 19 augustus 1666, die suggereerde dat het manuscript geschreven zou kunnen zijn door de Engelse experimentele wetenschapper Roger Bacon. Als dit waar was, zou het manuscript bijzonder waardevol zijn, dus Voynich deed zijn uiterste best om het te bewijzen. Hierin werd hij echter gehinderd door de belofte die hij bij aankoop had gedaan.

De eerste eigenaar in de bekende geschiedenis van het manuscript was Jacobus Horcicky de Tepenec. Zijn naam is op de eerste pagina met het blote oog niet meer te zien, maar werd toevallig door Voynich ontdekt bij het maken van een fotokopie. Horcicky was de hofapotheker van Rudolf II, keizer van het Heilige Roomse Rijk rond 1600. Pas in 1608 ontving Horcicky de titel ‘de Tepenec’ die in het manuscript vermeld staat, dus we weten dat het manuscript in of na dat jaar in zijn bezit was. Hoe Horcicky aan het manuscript kwam, en hoe hij het is kwijtgeraakt, is niet bekend.

Vervolgens duikt het manuscript op bij een obscure 17e-eeuwse alchemist uit Praag, Georg Baresch. Baresch probeerde vergeefs om het manuscript te lezen. Toen dat niet lukte, zocht hij contact met de jezuïtische wetenschapper Athanasius Kircher. Kircher had namelijk de reputatie dat hij iedere tekst kon ontcijferen; hij zou zelfs hiërogliefen kunnen lezen. (Pas meer dan anderhalve eeuw later, na de ontdekking van de Steen van Rosetta, werd het Egyptische schrift

*echt* ontcijferd.) Baresch stuurde alleen gedeeltelijke kopieën naar Kircher, maar niet het manuscript zelf. Of Kircher ooit op Baresch' brieven heeft gereageerd weten we niet.

De alchemist Baresch liet na zijn dood zijn bibliotheek, waaronder het manuscript, na aan zijn goede vriend Johannes Marcus Marci. Marci droeg het manuscript wel over aan Kircher. Marci schreef aan Kircher in de brief uit 1666, die nog altijd bij het manuscript wordt bewaard:

> *Verum labor hic frustraneus fuit, siquidem non nisi suo Kirchero obediunt eiusmodi sphinges.*

Oftewel: "Maar zijn [Baresch'] werk was zinloos, want zulke sfinxen gehoorzamen niemand behalve Kircher."

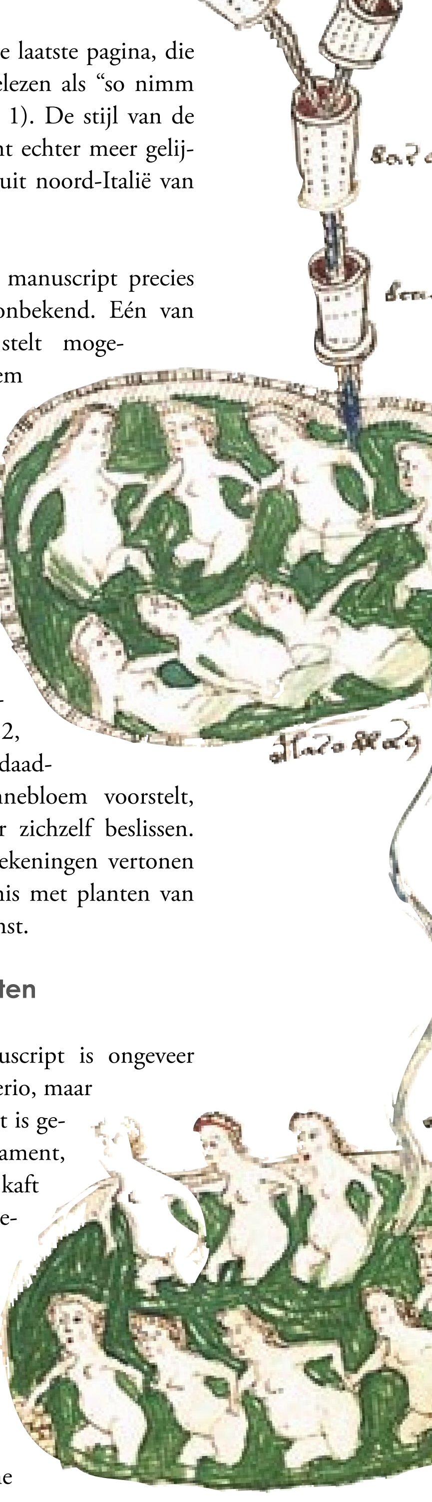
Wat er na Kircher met het manuscript gebeurd is, weten we niet. Waarschijnlijk is het enkele keren meeverhuisd met verschillende jezuïtische boekencollecties, en uiteindelijk beland bij de kostschool waar Wilfrid Voynich het gekocht had.

## Mysterie op mysterie

Het is tot op de dag van vandaag een mysterie door wie het Voynich-manuscript geschreven is. De Roger-Bacontheorie wordt onwaarschijnlijk geacht. Ook kan het geen vervalsing zijn door Voynich zelf, want in onafhankelijke correspondentie van Kircher wordt van het manuscript melding gemaakt. Wel hebben handschriftdeskundigen vastgesteld dat het mogelijk door één persoon geschreven is, maar wel gedurende een langere periode.

Waar het boek is geschreven weet men ook niet. Sommigen plaatsen het in Duitsland vanwege enkele woorden op de laatste pagina, die kunnen worden gelezen als "so nimm geissmilch" (figuur 1). De stijl van de tekeningen vertoont echter meer gelijkenis met werken uit noord-Italië van rond die tijd.

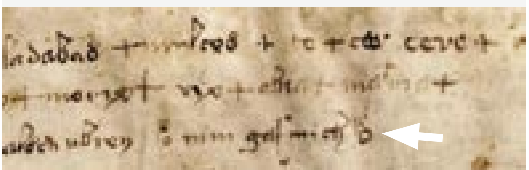
Zelfs wanneer het manuscript precies geschreven is, is onbekend. Eén van de afbeeldingen stelt mogelijk een zonnebloem voor. Aangezien deze bloem afkomstig is uit Zuid-Amerika, zou het manuscript geschreven moeten zijn na de ontdekking van Amerika in 1492. Of de afbeelding (figuur 2, volgende pagina) daadwerkelijk een zonnebloem voorstelt, mag eenieder voor zichzelf beslissen. Sommige andere tekeningen vertonen echter ook gelijkenis met planten van Amerikaanse afkomst.



## Wat we wél weten

Het Voynich-manuscript is ongeveer zo groot als deze perio, maar wel wat dikker. Het is geschreven op perkament, en ook de (blanco) kaft is van perkament gemaakt. Oorspronkelijk bestond het uit 20 katernen van verschillende dikte, maar aan de paginanummering (in 'gewone' Arabische

**FIGUUR 1** "So nimm geissmilch"?



**FIGUUR 2** Een zonnebloem, of toch niet?

**FIGUUR 3** De maand "octobre" uit het hoofdstuk over astrologie.

cijfers) zien we dat er twee katernen verloren zijn gegaan. Sommige pagina's zijn uitvouwbaar en bevatten extra grote afbeeldingen.

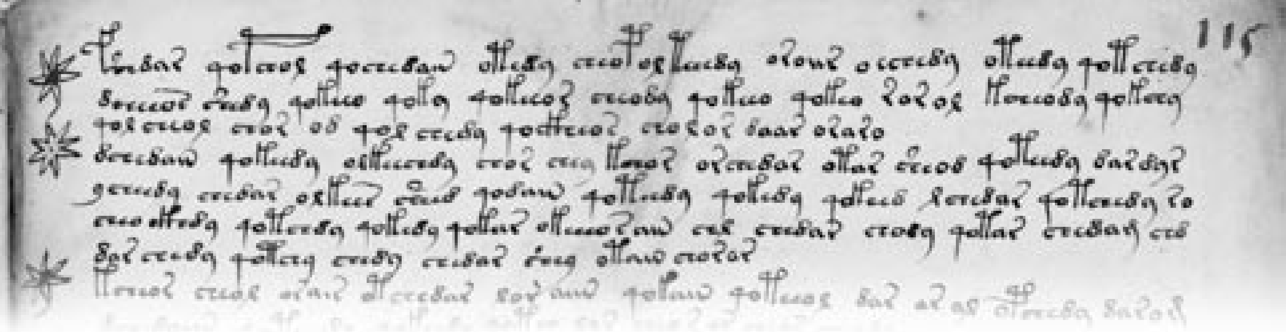
Aan de hand van de afbeeldingen kunnen we het werk opdelen in zes hoofdstukken. Het eerste hoofdstuk gaat over planten, maar de meeste planten op de tekeningen zijn onidentificeerbaar. Het tweede hoofdstuk gaat over astrologie en bevat tekeningen van de zon, de maan, sterren en de twaalf sterrenbeelden van de dierenriem. Het derde hoofdstuk bevat figuurtjes van naakte vrouwen in en om buizenstelsels, en wordt soms opgevat als biologische verhandeling. Het vierde hoofdstuk wordt doorgaans 'kosmologisch' genoemd, en bevat cirkelvormige patronen. Het vijfde hoofdstuk is mogelijk farmaceutisch van aard, en bevat tekeningen van (delen van) planten en kruiden, met stapels potjes in de kantlijn. Het zesde en laatste hoofdstuk bevat geen illustraties, maar bestaat uit een reeks alinea's die elk worden voorafgegaan door een soort 'bullet' in de vorm van een sterretje of bloemetje.

Uit de rafelige rechtermarge en de helling van het schrift zien we dat het manuscript is geschreven van links naar rechts en van boven naar beneden. Aangezien de tekst netjes om de figuren heen loopt, zijn de figuren waarschijnlijk het eerst ingevoegd. De vloeiende manier waarop de tekst geschreven is, suggereert dat dit niet de eerste keer was dat de schrijver deze taal gebruikte.

Het alfabet is echter uniek, en correspondeert niet met enige bekende taal. Afhankelijk van hoe je telt, bestaat het alfabet uit 17 tot 38 letters. Van sommige is het niet duidelijk of het zelf letters zijn, of combinaties van verschillende letters. Verder zijn er nog een handvol tekens die maar een paar keer voorkomen in de tekst. Op enkele plaatsen komt het Latijnse alfabet voor: zo zijn met enige moeite de namen van de maanden te herkennen in de afbeeldingen van de dierenriem (figuur 3).

## Ontcijferpogingen

Over de 'taal' in het manuscript bestaan verscheidene theorieën. Het zou een bestaande taal kunnen zijn die is opgeschreven in een onbekend alfabet. Het zou een bestaande taal kunnen zijn die ook op een andere manier is versleuteld. Misschien is het wel een verzonnen taal, al of niet gecodeerd (zoals sommige striptekenaars lijken te denken; zie figuur 4). Tenslotte zou het nog kunnen dat de tekst in het manuscript willekeurige onzin is, en helemaal niets betekent. Voor elk van deze mogelijkheden zijn aanwijzingen te vinden.



De eerste moderne poging om het Voynich-manuscript te lezen werd gedaan in 1919 door William Newbold. Volgens hem was het manuscript geschreven in een code die anagrammen gebruikte van tot wel 110 letters: bij het ontcijferen kwam het dus aan op de creativiteit van de cryptograaf om deze op de 'juiste' volgorde te zetten. Bovendien ging Newbold niet uit van de letters zelf, maar van een 'microschrift' langs de randen van de letters. De symbolen die hij hier door zijn loupe zag, bleken later echter gewoon veroorzaakt te worden door oneffenheden in het perkament. Newbolds 'vertaling', waarin Roger Bacon vier eeuwen voor Antoni van Leeuwenhoek een beschrijving van de microscoop zou geven, wordt tegenwoordig dan ook niet meer serieus genomen.

In 1944 werd het gehele manuscript met de hand overgeschreven en voorzien van aantekeningen door Theodore Petersen. Tot aan zijn dood heeft Petersen geprobeerd het manuscript te ontcijferen, maar helaas is hij nooit tot een vertaling gekomen. In dezelfde periode werd door een gevarieerde groep mensen, later de First Study Group genoemd, in de vrije uren naast het oorlogswerk een poging gedaan tot het ontcijferen.

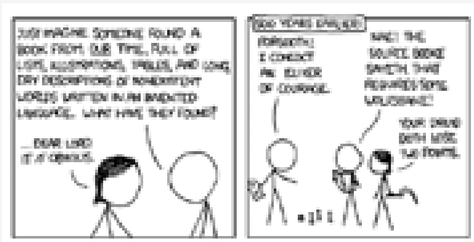
Het werk van de cryptoloog Prescott Currier, met name zijn toespraak op een conferentie in 1976, was van grote invloed op later werk. Currier ontdekte dat de pagina's kunnen worden geclassificeerd in twee verschillende handschriften, elk met zijn eigen 'taal'. Of het inderdaad om twee verschillende schrijvers gaat is niet duidelijk, maar de 'talen' vertonen statistisch significante verschillen. Currier was er zelf van overtuigd dat er minstens vijf verschillende schrijvers waren, maar daar zijn latere onderzoekers het niet over eens.

John Stojko publiceerde in 1978 een vertaling die gebaseerd was op het Oekraïens. Volgens hem was de tekst van het manuscript Oekraïens waarvan de klinkers waren weggelaten, vervolgens de spaties anders waren neergezet, en tenslotte overgezet naar een ander alfabet. Ook Stojko's methode gaf de vertaler veel te veel vrijheid, maar dan nog kwam hij slechts tot twijfelachtige passages als "Oog van God, u meet lege religie voor de wereld. Uw doel, niet religie, leeft in u."

De opkomst van de pc en het internet bracht in 1991 hobbyisten bijeen die de vertaalpogingen nieuw leven inbliezen. Via een mailinglijst hielden zij contact met elkaar; deze e-mails zijn nu nog terug te lezen [2]. De resultaten van deze amateurs zijn met enig programmeerwerk eenvoudig te reproduceren. In het vervolgartikel in de volgende Periodiek zullen we kijken wat hiermee over het manuscript te zeggen is.

## Tot slot

Een code, een taal, een grap? Als het Voynich-manuscript inderdaad betekenisloze onzin is, zullen we dat nooit met zekerheid kunnen vaststellen; het beste wat we in dat geval kunnen concluderen is dat het *waarschijnlijk* onzin is. Als het manuscript daarentegen wel iets betekent, is er nog hoop dat we het ooit kunnen ontcijferen. En dan maar hopen dat het geen regelboek voor een rollenspel blijkt te zijn. •



**FIGUUR 4** Een recente theorie over de betekenis van het manuscript (xkcd.com/593).

## Referenties


[1] Het manuscript online bekijken: beinecke.library.yale.edu/digitallibrary (zoek op "Voynich")

[2] De mailinglijst: voynich.net

[3] Dé site over het manuscript: voynich.nu

[4] Goede inleiding op Wikipedia: en.wikipedia.org/wiki/Voynich_manuscript

# Kraanvogels en complexe getallen

*De papieren rekenmachine*

DOOR **MONIQUE VAN BEEK** EN **THOMAS TEN CATE**

Stel je voor, je zit bij een wiskundetentamen en opeens begeeft je rekenmachine het. In hoofdrekenen ben je nooit een kei geweest, dus reken je op een kladblaadje verder. Maar dan breekt ook de punt van je laatste potlood af … Gelukkig heb je een grote stapel kladpapier, waarmee je ook zonder te schrijven prima kunt rekenen!

Origami, Japans voor simpelweg 'papier vouwen', wordt in het verre oosten al vele eeuwen beoefend. Het is niet alleen interessant als kunstvorm, want over gevouwen papier valt wiskundig veel te zeggen. Deze wiskunde heeft zelfs praktische toepassingen, zoals het opvouwen van de zonnepanelen van een satelliet. En, zoals gezegd, het maken van berekeningen.

## Spelregels

Bij origami denk je natuurlijk meteen aan driedimensionale constructies, zoals de bekende kraanvogel. Maar het platte vlak van het papier is ook al heel interessant. In dit artikel zullen we ons daarom tot twee dimensies beperken.

De regel van 'klassiek' origami is dat je papier heel moet blijven, dus je mag niet knippen of scheuren. Ook lijmen is niet toegestaan. Meestal wordt een eindig vel papier gebruikt, maar als ruimdenkend wiskundige begin je natuurlijk meteen met het vouwen van het oneindige tweedimensionale Euclidische vlak. (Het opvouwen van ruimtes van hogere dimensie en niet-Euclidische ruimtes wordt als oefening aan de lezer overgelaten.)

## Constructies

Maar wat is het nut van een tweedimensionale origami? Stel je voor dat je het vlak telkens alleen dubbelvouwt, en weer uitvouwt. Elke vouw geeft je dan een rechte lijn in het vlak. Dit doet denken aan een andere tweedimensionale constructiemethode: passer en liniaal. Daarmee kun je vele verschillende geometrische figuren construeren, maar het blijkt dat sommige constructies die met passer en liniaal niet kunnen, met origami wel mogelijk zijn!

Voor de volledigheid nog even de elementaire handelingen die je met passer en liniaal kunt uitvoeren:

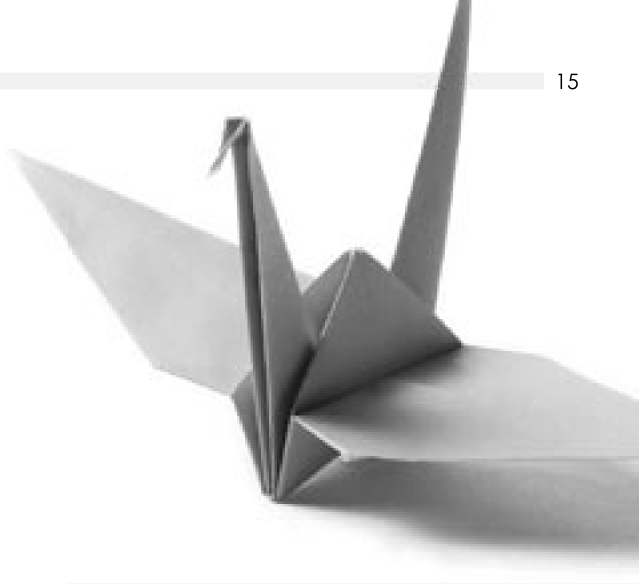
P1. een lijn trekken door twee punten
P2. een cirkel tekenen om een punt, door een ander punt

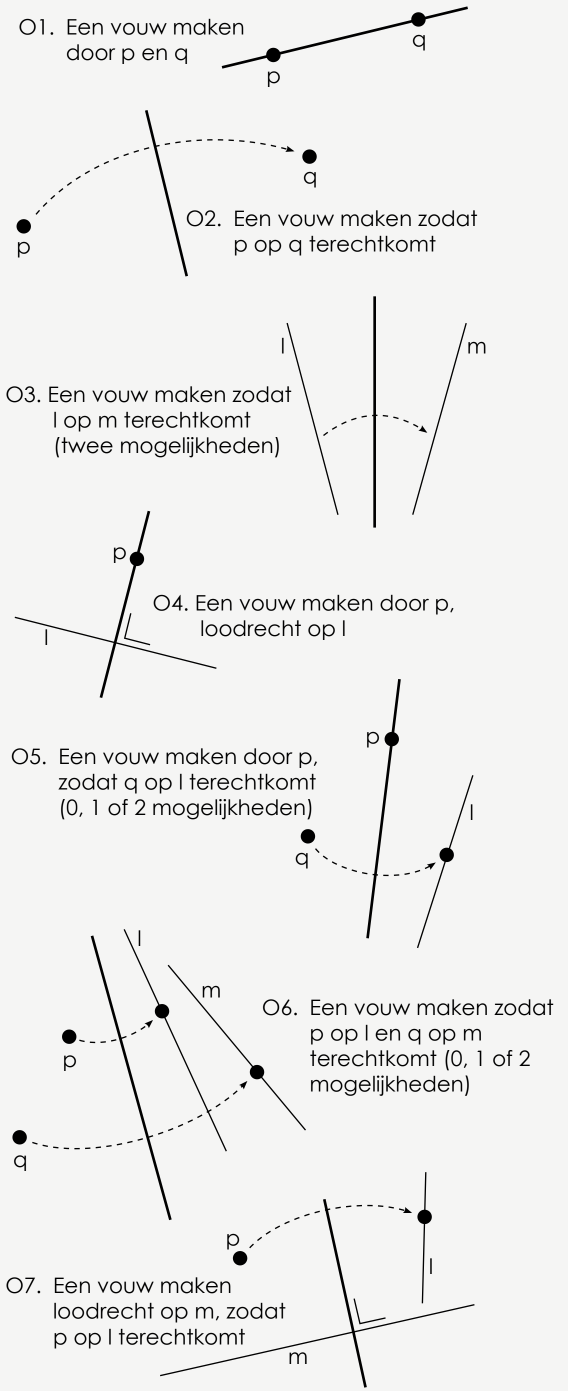
Verder mogen we natuurlijk willekeurige punten plaatsen. Gebruik makend van alleen deze handelingen is het eenvoudig om een gegeven hoek in twee gelijke delen te verdelen (bisectie). Een hoek in drieën delen (trisectie) daarentegen blijkt onmogelijk te zijn. Het bewijs voert helaas te ver om hier te behandelen, maar is met behulp van wat algebra goed te doen [1].

Waar passer en liniaal genoeg hebben aan twee handelingen, heeft origami er zeven. Vreemd genoeg worden deze handelingen vaak aangeduid als "axioma's". De eerste zes werden in 1991 gepubliceerd door Humiaki Huzita; in 2003 ontdekte Koshiro Hatori een zevende mogelijke handeling. Alle zeven handelingen zijn geïllustreerd in figuur 1.

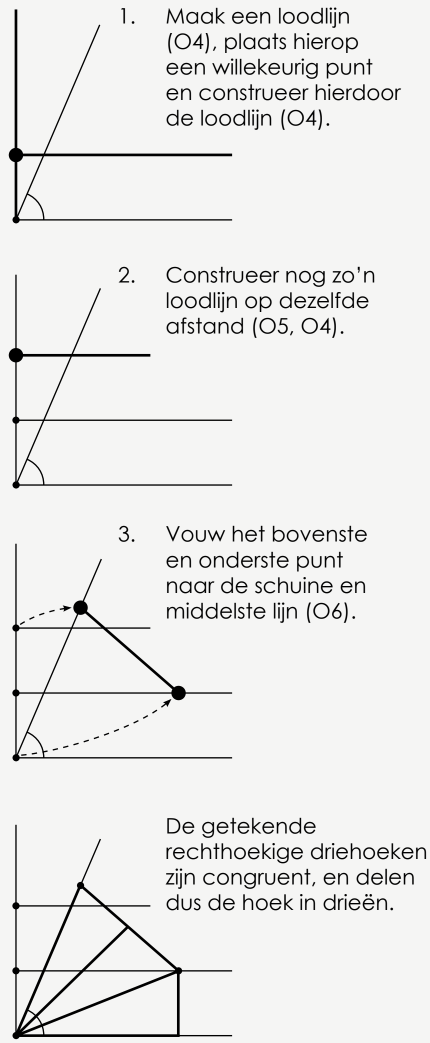
Ook hier mogen we natuurlijk willekeurige punten plaatsen. Robert Lang heeft bewezen dat er niet meer dan deze zeven handelingen mogelijk zijn [2]. Feitelijk zijn ze allemaal uit te drukken in termen van O6 (zie Hatori [3]); de term "axioma" is dus echt misplaatst.

Met deze zeven handelingen kunnen we nu eenvoudig een hoek in drieën delen. Zie daarvoor figuur 2.

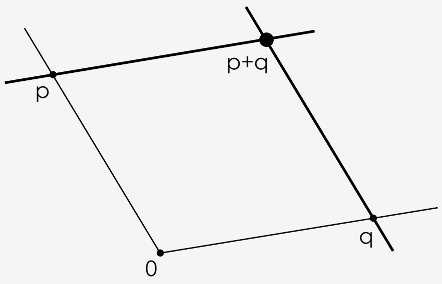





**FIGUUR 1** De zeven axioma's van origami




**FIGUUR 2** Trisectie van een hoek




**FIGUUR 3** Optelling van twee getallen: construeer het vierde hoekpunt van het parallellogram (viermaal O4)

## Rekenen

Het tweedimensionale vlak kunnen we niet alleen opvatten als vouwblaadje, maar ook als het complexe vlak. Een punt is dan hetzelfde als een complex getal. Het leuke is nu dat we rekenkundige operaties kunnen uitvoeren op deze complexe getallen, door de juiste vouwen te maken in het papier. Zo hebben we aan het stukje papier een eenvoudige, maar verrassend krachtige rekenmachine!

We nemen aan dat er twee punten gegeven zijn: 0 en 1. Deze leggen het coördinatenstelsel vast. Het vinden van de reële en imaginaire as en de punten $-1$, $i$ en $-i$ laten we over aan de lezer als eenvoudige oefening.

Optellen van twee punten $p$ en $q$ doen we zoals beschreven in figuur 3. Aftrekken volgt eenvoudig door een van de punten eerst te spiegelen in de oorsprong (ga na hoe je dit doet). Met deze operaties kunnen we alle gehele getallen $\mathbb{Z}$ maken, en bovendien de complexe variant, de gehele getallen van Gauss $\mathbb{Z}[i]$.

Vermenigvuldigen van twee complexe getallen kunnen we schrijven in termen van optellen, aftrekken, vermenigvuldigen met een reëel getal, en vermenigvuldigen met $i$:

$$(a+bi)(c+di) = ac + (ad+bc)i - bd$$

Vermenigvuldigen van een complex getal $p$ met een reëel getal $r$ kan gedaan worden met de gelijkvormigheid van driehoeken (probeer het zelf eens). Vermenigvuldigen met $i$ is een rotatie van $\frac{\pi}{2}$ om de oorsprong.

Delen, oftewel vermenigvuldigen met de inverse $p^{-1}$, volgt uit

$$(a+bi)^{-1} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$$

Wat we dus nog nodig hebben is deling door een reëel getal, en dat werkt bijna hetzelfde als vermenigvuldigen met een reëel getal. Met de elementaire operaties optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen hebben we nu een eenvoudige rekenmachine gemaakt.

## Algebraïsche resultaten

Een algebraïcus zal meteen opmerken dat met de bovengenoemde operaties de 'origami-construeerbare getallen' $\mathbb{O}$ een lichaam vormen. Het is duidelijk dat alle breuken $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{O}$ zijn bevat, en ook de complexe variant hiervan, de breuken van Gauss $\mathbb{Q}(i)$. Natuurlijk vragen we ons nu af wat voor lichaam $\mathbb{O}$ eigenlijk is. Zou het misschien alle algebraïsche getallen van $\mathbb{C}$ kunnen bevatten? Zitten bijvoorbeeld alle complexe $n^{\text{e}}$-machtswortels van 1 er in?

Dit blijkt helaas niet waar te zijn. De $n$-wortels van 1 zijn namelijk precies de hoekpunten van een regelmatige $n$-hoek om de oorsprong. Het valt te bewijzen dat deze origami-construeerbaar is dan en slechts dan als $n$ van de vorm $n = 2^a 3^b p_1 \ldots p_k$ is, waar iedere priem $p_i$ van de vorm $p_i = 1 + 2^c + 3^d$. Het bewijs verloopt via inductie, en de lezer wordt zeer aangeraden om het na te lezen in [4].

Mocht je dus op je tentamen een $10^{\text{e}}$-machtswortel nodig hebben ($10 = 2^1 \cdot 3^0 \cdot 5$, en $5 = 1 + 2^2 \cdot 3^0$), dan heb je aan een kladblaadje voldoende. Pas bij het trekken van een $11^{\text{e}}$-machtswortel raak je in de problemen. De rekenmachine zal dus nog wel een tijdje langer de scepter blijven zwaaien tijdens de wiskundeles. •

## Referenties

[1] en.wikipedia.org/wiki/Angle_trisection
[2] Robert J. Lang, 1996–2003, "Origami and geometric constructions." langorigami.com/science/hha/origami_constructions.pdf
[3] Koshiro Hatori, 2003, "Origami construction." origami.ousaan.com/library/conste.html
[4] James King, 2004, "Origami-constructible numbers." www.cs.mcgill.ca/~jking/papers/origami.pdf

# Studeren in het buitenland

*Van onze Noorse correspondent*

DOOR **MARIJE BAKKER**

Na een jaar in de perioredactie te hebben gezeten en braaf stukjes aangeleverd te hebben, vond ik het toch wel even wennen om niets meer te hoeven schrijven. Gretig zei ik dan ook “ja” op de vraag van de huidige redactie om iets te schrijven over mijn belevenissen in het (eigenlijk nog niet zo heel erg) koude noorden voor de rubriek ‘Studeren in het buitenland’.

OSLO, 24 NOV. — Noorwegen, het land van elanden, naaldbomen en fjorden. Ook het land van brunost (bruine kaas), Noorse kronen en Håvard Bøkko (geen Sven Kramer, maar toch). Bij uitstek een ideaal vakantieland voor een ieder die van de natuur houdt; bij uitstek niet het land voor studenten die dol zijn op bier.

Dol op bier ben ik nooit geweest, dus Noorwegen was voor mij altijd een ideaal vakantieland. Maar goed, wat maakt je ideale vakantieland tot een land waar je wilt leven? Voor mij was dat *Jenta møter sin nordmann*: het meisje ontmoet haar Noorse man. Toen was de keuze snel gemaakt: Bye bye Groningen, hei hei Oslo!

## Gezellig bij elkaar

De campus hier, Blindern, lijkt eigenlijk wel wat op het Zernike. Blindern vormt een gezellige mix van studenten en ’s ochtends zitten de metro’s naar Blindern stampvol met studenten. Alle studenten hebben college op deze campus, met uitzondering van de rechtenstudenten. Voordeel van het centreren van studenten op de campus is dat de meeste faciliteiten ook op Blindern te vinden zijn. In de boekhandel, Akademika, kun je terecht voor al je (studie)boeken. Uiteraard krijg je niet zoveel korting als bij de FMF, maar toch zijn de prijzen schappelijk en de mensen daar hebben verstand van zaken.

In de grote studentenkantine kun je dagelijks terecht voor een warme maaltijd en de kantine is geopend tot zeven uur ’s avonds. Mocht je liever zelf koken, dan kun je boodschappen doen in de onderliggende supermarkt. Verder zijn er ook een klein postkantoor, een kapper, een uitzendbureau en een paar gezellige cafés om zowel je sociale als professionele leven te stimuleren.

Een deel van de universitaire sportfaciliteiten is ook op de campus te vinden. Hier kun je balsporten beoefenen, klimmen en jezelf in het zweet werken in de fitnessruimte. Mocht je ondanks veel sporten en gezonde voeding onverhoopt een dokter nodig hebben, dan kun je terecht bij de huisartsenpost op Blindern. De meeste studenten zijn geregistreerd bij deze huisartsenpost en na registratie is een consult gratis.

Naast al deze faciliteiten heeft Blindern ook vele kelders waarin op vrijdagavond quizzen en feesten georganiseerd worden. In het algemeen gaan studenten alleen naar de kelder van hun eigen faculteit, maar bij het grote jaaropeningsfeest staan de deuren van alle kelders open voor elke student. In elke kelder krijg je een stempel en heb je een stempelkaart vol, dan krijg je een gratis drankje (en dat scheelt je hier al snel zo’n vijf euro!).

## Uithangbord

Zoals ik al zei hebben de rechtenstudenten hun eigen stek, en wel in het oude universiteitsgebouw, dat vlak bij het koninklijk paleis ligt. Dit gebouw, Domus media, is het uithangbord van de universiteit.

Dit is de plaats waar internationale en eerstejaarsstudenten verzamelen voor de introductiedagen en op de trap van Domus media luidde de rector magnificus reeds halverwege augustus het nieuwe studiejaar in met een klinkende toespraak. Nou ja, het klonk in elk geval ‘klinkend’, maar mijn Noors was toen nog niet zo goed dat ik veel van de toespraak kon volgen.

Domus media dateert uit 1841 en is daarmee ouder dan het huidige (en derde!) Groningse Academiegebouw, dat in het begin van de twintigste eeuw uit de grond werd gestampt.

Toch is de universiteit van Oslo nog lang zo oud niet als de Rijksuniversiteit Groningen. Pas in 1811 werd de universiteit opgericht. Voor die tijd was de universiteit van Kopenhagen de enige universiteit in de unie Denemarken-Noorwegen.

Toen Noorwegen onafhankelijk werd in 1905, bleef de universiteit van Oslo dik veertig jaar de enige universiteit in Noorwegen. Pas in 1946 kreeg de universiteit gezelschap van de tweede universiteit in Noorwegen, namelijk die in Bergen.

Ondanks de jeugdigheid van de universiteit van Oslo, heeft deze toch al een paar Nobelprijswinnaars voortgebracht. Ook de bekende Noorse wiskundige Niels Henrik Abel heeft in Oslo gestudeerd. Daar de meeste gebouwen op de campus hier vernoemd zijn naar belangrijke historische personen, zal het je waarschijnlijk niet verbazen dat het wiskundegebouw Abels naam draagt.

## Wiskundige snoepjes

Met zijn twaalf verdiepingen is het Niels Henrik Abels hus een van de hoogste gebouwen op de campus. Net zo imponerend als de omvang van het gebouw is het aanbod aan vakken voor wiskundestudenten: met meer dan 160 vakken voel je je als een kind in een snoepwinkel!

Om je niet misselijk te eten aan al deze heerlijke vakken, is er op de zevende verdieping een studieadviseur. Je kunt altijd even binnenwandelen om te bespreken welke vakken je wilt doen en wat de handigste indeling van je tijd is. Zowel bij de studieadviseur als bij de professoren hangt een informele sfeer, die me veel aan de sfeer in Groningen doet denken.

De meeste kelders op de campus dienen, zoals eerder gezegd, voor sociale doeleinden. Net iets spannender is de kelder van het Niels Henrik Abels hus.

## Een spannende kelder

Bier wordt in de kelder van het Niels Henrik Abels hus niet geschonken. Muziek vind je er slechts in de vorm van een radio op de achtergrond of een neuriënde student. Toch is voor een masterstudent technische wiskunde deze kelder het bezoeken waard. Hier is namelijk het hydrodynamisch laboratorium gehuisvest.

In dit lab kun je ook als masterstudent je onderzoek doen en gebruik maken van de aanwezige apparaten. Van alle aanwezige apparatuur is de grote watertank waarin golven opgewekt kunnen worden misschien wel het meest tot de verbeelding sprekende apparaat.

Ondanks dat ik mijn masteronderzoek inmiddels heb afgerond, heb ik toch al een kijkje mogen nemen in dit lab. Voor een van de vakken die ik hier doe, moesten we golven opwekken en hieraan metingen doen. Hoewel dit geen baanbrekend onderzoek was, was het wel ontzettend leuk en leerzaam om op deze manier, oneerbiedig gezegd, met water te spelen.

Aan de andere kant van de kelder wordt ook veel werk verricht: hier is namelijk een grote computerruimte. Hoewel het hier meestal rustig werken is, werden we afgelopen week opgeschrikt door een brandoefening.

De bel die als waarschuwing gebruikt, wordt klinkt anders dan de Nederlandse bellen. Het duurde dan ook even voor ik door had dat we het gebouw moesten verlaten. Gelukkig konden we verder werken in Vilhelm Bjerknes hus, het andere gebouw voor wiskundestudenten. Ja, het mag een ware luxe heten: maar liefst twee gebouwen. Vilhelm Bjerknes, zo las ik, was trouwens de professor die opperde om een hydrodynamisch lab op te richten.

Maar niet al het interessante gebeurt ondergronds. Bovengronds is ook veel te beleven. Dit blijkt niet alleen uit de twaalf bovengrondse verdiepingen in het Niels Henrik Abels hus, of uit het feit dat de metro's een grotendeels bovengronds traject afleggen, maar ook uit het spraaklab op de begane grond waar ik twee keer in de week zit om Noors te oefenen.

## Norsk

Gelukkig is het schrijven van de Noorse taal in het algemeen niet zo heel moeilijk. Een vriendin die bij ons op bezoek was moest toch wel even grijnzen toen ze zag dat station hier als 'stasjon' gespeld wordt. Dat is hier de algemene tendens: je schrijft het zoals je het zegt. Dat is lekker makkelijk. En zodra je oren gewend zijn aan de zangerige klanken van de Noorse taal, is het gesproken Noors ook wel te volgen.

Er wordt wel eens gezegd dat je een taal beheerst als je de vloekwoorden kent, maar wat mij betreft geldt dat je een taal onder de knie hebt als je grappen in die taal kunt maken en verstaan.

Volgens mijn eigen richtlijnen omtrent het beheersen van een taal gaat mijn Noors de goede kant op. Gisteravond nog zat ik na een concert van een van de beste janitsarorkesten in Noorwegen, waarin mijn Noorse wederhelft speelt, samen met een paar orkestleden in een pub. Dit was zo'n gezellige, ouderwetse bruine kroeg, maar daar gaat het nu niet om. Waar het wel om gaat, was dat ik zonder moeite ook de flauwe grappen kon begrijpen.

Nog een paar maanden en dan verwacht ik vloeiend Noors te spreken. En in de sneeuw te zitten. Wat betreft die sneeuw: afgelopen week hebben we hier al de eerste sneeuwvlokken mogen begroeten. Hoe toepasselijk als je de bioscoop uitkomt en je na het zien van de kerstfilm 'A Christmas Carol' door de sneeuw naar huis kunt lopen.

Uiteraard verdween de sneeuw de volgende dag als de spreekwoordelijke sneeuw voor de zon, maar toch kijk ik al uit naar een witte kerst. En zelfs dan mag ik nog pepernoten eten, want pepernoten hier zijn een kersttraditie! *Jeg elsker det! Ha det!* •

/technische informatiesystemen

/embedded software

/programmeerbare logica

/elektronica

>the right development

# Variëren kun je leren

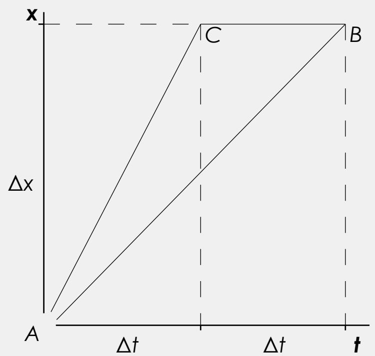
DOOR **ROEL ANDRINGA**

Een aanzienlijk deel van de Nederlandse studenten probeert met zo min mogelijk inzet haar resultaten te maximaliseren.[1] Als we deze inzet voor het gemak even 'de actie S' noemen, dan zouden we kunnen stellen dat veel studenten streven naar een extremum van S, waarbij het liefst natuurlijk een minimum wordt bereikt.

De laatste eeuwen blijkt dat onze natuur eenzelfde soort lakse houding heeft. Dit principe, dat onder de naam 'het principe van stationaire actie' gaat, is een buitengewoon vruchtbaar idee. Of je het nou over Newtoniaanse fysica, algemene relativiteit, kwantumveldentheorie of snaartheorie hebt, de 'laksheid' van de natuur geeft je de bewegingsvergelijkingen! In al deze theorieën speelt de actie dan ook een centrale rol. Hier zal worden geprobeerd om op zowel een fysische en meetkundige als een wiskundige manier dit erg belangrijke principe aannemelijk te maken.

## Klassieke vrije deeltjes

Als simpel voorbeeld nemen we een klassiek vrij deeltje, bekend van de middelbare school. Newton vertelt ons dat dit deeltje vanuit een inertiaalstelsel bekeken een constante impuls $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ heeft en in een rechte lijn door de ruimte beweegt. Je kunt jezelf nu de volgende vraag stellen: kunnen we, gegeven de totale energie van het deeltje, beredeneren *waarom* het deeltje nou juist dit specifieke pad kiest? Hierbij moet je je bedenken dat de beweging van ons vrije deeltje volgens Newton gekenmerkt wordt door een constante vectoriële impuls $\mathbf{p}$, terwijl de kinetische energie $T$ een scalair is. Met slechts energiebehoud kunnen we dus nooit de richting van dit vrije deeltje voorspellen. De vraag is hoe we dit *wel* zouden kunnen doen.




**FIGUUR 1** Het vrije deeltje gaat via *AB*. Een alternatieve route is *ACB*. Het punt *A* correspondeert met (*x*,*t*) = (0,0), het punt *B* met (Δx, 2Δ*t*) en punt C met (Δx, Δt).

In figuur 1 zien we de beweging van ons vrije deeltje waarin in $2\Delta t$ seconden een afstand $\Delta x$ wordt afgelegd. Dit is pad $AB$. Een alternatief pad tussen de twee punten zou pad $ACB$ zijn. Merk op dat in het alternatieve pad het $\Delta t$ seconden duurt om het pad $AC$ met afstand $\Delta x$ af te leggen en het deeltje vervolgens in pad $CB$ $\Delta t$ seconden stilstaat.

Als we de analogie tussen de natuur en de gemiddelde student serieus nemen, verwachten we dat de kinetische energie tussen $A$ en $B$ geminimaliseerd zal worden, waarbij het deeltje niet per se de verstreken tijd tussen $A$ en $B$ wil minimaliseren. De kinetische energie van het deeltje langs pad $AB$ wordt gegeven door

$$T_{AB} = \frac{1}{4} \times \left[\frac{1}{2}m\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2\right].$$

Echter, langs pad $ACB$ is de kinetische energie anders:

$$T_{AC} = \frac{1}{2}m\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2, \quad T_{CB} = 0$$

Als we deze resultaten willen vergelijken, zullen we het over de gemiddelde kinetische energie moeten hebben. Voor pad $AB$ is dit eenvoudig: de gemiddelde kinetische energie $\langle T_{AB}\rangle$ is gelijk aan $T_{AB}$ zelf aangezien de snelheid gedurende de $2\Delta t$ seconden hetzelfde is. Voor pad $ACB$ merken we op dat het deeltje de

[1] Een strategie die de auteur overigens ook nogal eens heeft toegepast, maar dat terzijde.

helft van de tijd $\Delta t$ met snelheid $v$ naar $AC$ gaat, en vervolgens de andere helft van de tijd $\Delta t$ stilstaat. Dat dit een oneindige versnelling impliceert, vegen we nu voor het gemak even onder het tapijt. De gemiddelde kinetische energie wordt zo

$$\langle T_{ACB}\rangle = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}m\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \frac{1}{2}\times 0 = \frac{1}{4}m\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2$$

Hieruit kunnen we concluderen dat $\langle T_{ACB}\rangle = 2\langle T_{AB}\rangle$.

## Klassieke deeltjes in een krachtveld

Het verhaal wordt iets subtieler als we ons deeltje een potentiaal $U(\mathbf{x})$ laten ondergaan zodat de totale energie $E$ gegeven wordt door $E = T + U$. Natuurlijk zal het deeltje in het algemeen niet meer een rechte lijn in de ruimte volgen. Je zou naïef kunnen gokken dat de natuur nu zal proberen de gemiddelde energie $\langle E\rangle = \langle T + U\rangle$ te minimaliseren. Hoe naïef deze gok is gaan we nu bekijken.

Newtons vergelijkingen zijn tweede-orde differentiaalvergelijkingen en geven ons in het algemeen een pad in de ruimte. Hoe dit pad eruit ziet hangt niet alleen van de plaats $\mathbf{x}(t)$ af, maar ook van haar afgeleides. Dit is subtiel! Als je van een functie $f(x)$ van één variabele $x$ een extremum uit wilt rekenen, stel je simpelweg $df/dx = 0$. In onze poging om de bewegingsvergelijkingen van een deeltje te beschrijven door een functie te minimaliseren, introduceren we de functie $L$ die van de positie $\mathbf{x}(t)$ afhangt die op zijn beurt weer van een variabele $t$ afhangt. Deze positie $\mathbf{x}(t)$ is een vector met componenten $x^j(t)$. Bovendien kan $L$ ook nog van de afgeleide van die positie afhangen. Dit noteren we als volgt:

$$L = L\{x^j(t), \frac{dx^j}{dt}; t\} \tag{1}$$

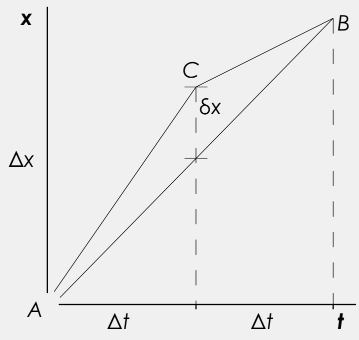
Dit beestje noemen we de Lagrangiaan. Je stopt dus een vector $\mathbf{x}(t)$ en haar afgeleide $d\mathbf{x}/dt$ in $L$, en deze wil je vervolgens minimaliseren.[2] Voor een vrij deeltje hebben we zo het vermoeden dat $L = \langle T\rangle$ en dat de oplossing wordt gegeven door het rechte pad $AB$. Dit kunnen we nagaan door een infinitesimaal ruimtelijk stukje $\delta\mathbf{x}$ van ons rechte pad $AB$ af te gaan wijken. Voor rekenkundig gemak maken we de knik in ons diagram op $t = \Delta t$. Het meetkundige plaatje wordt in twee dimensies dan zoals in figuur 2.

Je ziet dat het pad met een infinitesimale hoeveelheid $\delta\mathbf{x}$ wordt veranderd, maar deze verandering geeft natuurlijk ook een verandering in de snelheid $\mathbf{v} = d\mathbf{x}/dt$ die we in het geval van de rechte lijn $AB$ ook kunnen schrijven als $\mathbf{v} = \Delta\mathbf{x}/2\Delta t$. Merk op dat de snelheid $\mathbf{v}_{AC}$ op het traject $AC$ hoger wordt, terwijl de snelheid $\mathbf{v}_{CB}$ op het traject $CB$ kleiner wordt:

$$\delta v_{AC} = \frac{\delta x}{\Delta t}, \quad \delta v_{cb} = -\frac{\delta x}{\Delta t}$$

De $\delta\mathbf{x}$ induceert een verandering $\delta T$ in de kinetische energie via $\delta T = p^j\,\delta v^j$, en je kunt nu zelf met behulp van figuur 2 nagaan dat[3]

$$\delta\langle T\rangle = -\frac{1}{2}\frac{dp^j}{dt}\delta x^j$$




**FIGUUR 2** Een kleine verandering δ**x** in het pad *AB* resulteert in *ACB*. De verandering wordt precies op de helft van de totale tijd 2Δ*t* gemaakt zodat de knik op *t* = Δ*t* zit.

[2] We werken voor het gemak alleen met de eerste afgeleide, maar de analyse kan eenvoudig worden uitgebreid naar een willekeurig aantal afgeleides. Als bijvoorbeeld de versnelling ook met de tijd verandert, kunnen we het principe van stationaire actie gewoon blijven toepassen. Je hebt dan wel extra randcondities nodig.

Dit is één van die mintekens die belangrijk blijken te zijn. Het pad dat nu de kinetische energie geeft, wordt gegeven door $\delta\langle T\rangle = 0$ voor alle $\delta\mathbf{x}$. En dit geeft ons precies Newtons vergelijking voor een vrij deeltje!

Nu voegen we $U(\mathbf{x})$ toe. Laten we eens een naïeve gok wagen en stellen dat de natuur de totale gemiddelde energie $\langle E\rangle = \langle T+U\rangle = \langle T\rangle + \langle U\rangle$ minimaliseert, dus $L = \langle E\rangle$. Minimaliseren van $L$ betekent weer $\delta L = 0$. Argeloos zou je zeggen dat $\delta\langle U\rangle = \delta U$, maar onze $U(\mathbf{x})$ is een functie van $\mathbf{x}$ en is dus in het algemeen zeker niet constant over het stukje $\delta\mathbf{x}$! Voor rechte lijnen wordt de gemiddelde verandering in $U(\mathbf{x})$ gegeven door

$$\delta\langle U\rangle = \frac{1}{2}\delta U$$

Nu kunnen we weer $\delta L$ uitrekenen. We weten dat $\delta L = \delta\langle T\rangle + \delta\langle U\rangle$, en dus

$$\delta L = \frac{1}{2}\left(-\frac{dp^j}{dt} + \frac{dU}{dx^j}\right)\delta x^j$$

Als we eisen dat het pad van ons deeltje in een krachtveld gegeven wordt door $\delta L = 0$ voor alle $\delta\mathbf{x}$, dan zien we iets geks: Newtons vergelijking komt eruit met het verkeerde teken! De oplossing hiervoor is vrij simpel: we draaien het teken van $U$ in onze $L$ om en poneren dat de natuur het *verschil* tussen $\langle T\rangle$ en $\langle U\rangle$ minimaliseert. Nu zie je inderdaad dat uit $\delta L = 0$ met $L = \langle T - U\rangle$ volgt dat

$$\frac{dp^j}{dt} = -\frac{dU}{dx^j}$$

### Het continue geval

Dit gepiel met discrete benaderingen en dergelijke lijkt een beetje kunstmatig. Je kunt het ook vrij algemeen opschrijven via vergelijking (1). In het algemene geval zal dit betekenen dat je de functie $L$ moet integreren over de tijd. Deze integraal noemen we de actie $S$:

$$S = \int L\,dt$$

Je integreert hierin van een $t_1$ naar een $t_2$. Wiskundigen noemen zoiets een functionaal. Je stopt er namelijk *functies* $x(t)$ en $dx/dt$ in en krijgt er een getalletje voor terug. Het principe van de stationaire actie stelt nu het volgende:

> *Tussen gebeurtenis 1 op tijdstip $t_1$ en gebeurtenis 2 op tijdstip $t_2$ zal de natuur precies dát pad kiezen dat het verschil tussen de gemiddelde kinetische en potentiële energie minimaliseert.*

Oftewel: $\delta S = 0$ voor alle willekeurige $\delta\mathbf{x}$. We kunnen dit iets concreter maken. Je bent misschien geneigd om te stellen dat

$$\delta x^j = \frac{dx^j}{dt}\delta t$$

Dit betekent dat je een verandering $\delta\mathbf{x}$ induceert door $\delta t$. Echter, dat betekent dat je alleen binnen één specifieke $\mathbf{x}(t)$ via $\delta t$ aan het variëren bent, terwijl wij juist tussen verschillende $\mathbf{x}(t)$'s willen variëren om uiteindelijk de bewegingsvergelijkingen voor $\mathbf{x}(t)$ te verkrijgen. We kijken naar willekeurige verandering $\delta\mathbf{x}$ onafhankelijk van de tijdscoordinaat $t$![4] Dit betekent ook dat voor de variatie van de snelheid $\mathbf{v}$ geldt dat

$$\delta v^j = \delta\frac{dx^j}{dt} = \frac{d\delta x^j}{dt}$$

Dit zou in het algemeen niet gelden als $\delta\mathbf{v}$ een variatie zou zijn ten gevolge van een variatie $\delta t$. Dit gegoochel met variaties geeft ons de mogelijkheid om een expliciete uitdrukking voor $\delta S$ op te schrijven:

$$\delta S = \int \delta L\,dt$$

[3] Het inproduct tussen twee vectoren $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$ noteren we als $a^j b^j$, waarbij er een impliciete sommatie over $j$ wordt verondersteld: $a^j b^j = a^1b^1 + a^2b^2 + \cdots$. De briljante ingeving dat we niet telkens het sommatieteken hoeven op te schrijven komt van Einstein en wordt ook wel de 'Einstein-sommatieconventie' genoemd. Weer een minimalisatie van inspanning, dus.

[4] Om een simpel voorbeeldje te geven: voor een deeltje dat geen kracht ondergaat geldt $x(t) = B + vt$, en voor een oscillerend deeltje geldt $y(t) = A\sin(t)$. Welke oplossing we krijgen hangt af van de actie $S$, maar we kunnen via een variatie $\delta t$ nooit van $x$ naar $y$ komen.

De variatie in $L$ kun je uitrekenen via

$$\begin{aligned} \delta L &= \frac{\partial L}{\partial x^j}\delta x^j + \frac{\partial L}{\partial v^j}\delta v^j \\ &= \frac{\partial L}{\partial x^j}\delta x^j + \frac{\partial L}{\partial v^j}\frac{d\delta x^j}{dt} \end{aligned}$$

Je kunt de laatste term via de productregel ook schrijven als

$$\frac{\partial L}{\partial v^j}\frac{d\delta x^j}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v^j}\delta x^j\right) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v^j}\delta x^j$$

En als we alles invullen krijgen we tenslotte

$$\begin{aligned} \delta S = \int \left[\frac{\partial L}{\partial x^j} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v^j}\right)\right]\delta x^j \, dt \\ - \frac{\partial L}{\partial v^j}\delta x^j \Big|_{t_2}^{t_1} = 0 \end{aligned}$$

Vaak wordt de variatie $\delta \mathbf{x}$ op de eindpunten $t_1$ en $t_2$ op 0 gezet. Je bent immers geïnteresseerd in het pad tussen twee gegeven gebeurtenissen. Dat betekent dat de stokterm 0 is. Hoewel dit in sommige variatieproblemen niet opgaat, zijn we in fysische toepassingen vaak niet geïnteresseerd in de stokterm. In het algemene geval zal dan gelden dat de integrand van $\delta S$ gelijk is aan nul:

$$\frac{\partial L}{\partial x^j} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v^j}\right) = 0$$

Dit zijn $j$ vergelijkingen die je de bewegingsvergelijkingen geven voor de $j$ componenten van $\mathbf{x}$. Ze worden de Euler-Lagrangevergelijkingen genoemd. Als je nu $L = \langle T - U \rangle$ neemt in het geval van ons deeltje in een potentiaalveld $U(\mathbf{x})$, krijg je Newtons vergelijkingen. We hebben zo vanuit een scalaire funtie $L$ vectoriële bewegingsvergelijkingen verkregen!

## Aspecten van het variatieprincipe

Het belang van het variatieprincipe voor de moderne natuurkunde kan amper overdreven worden. Het laat je via de actie $S$, wat een scalaire functionaal is, vectoriële bewegingsvergelijkingen verkrijgen. Bovendien kun je zo op een heel elegante manier symmetrieën in je theorieën inbouwen: de analyse laat zien dat een symmetrie van je actie correspondeert met dezelfde symmetrie van je bewegingsvergelijkingen, iets wat overigens in het kwantummechanische geval niet meer helemaal opgaat.[5]

Daarbij is het principe heel algemeen. In het relativistische geval bijvoorbeeld stel je dat de natuur het pad in de ruimtetijd minimaliseert, en in de snaartheorie stel je dat het tweedimensionale oppervlak dat je eendimensionale snaartje traceert in de ruimtetijd, geminimaliseerd wordt op dezelfde manier als dat een zeepbel haar oppervlak zal minimaliseren. Amplitudes in het standaardmodel reken je het makkelijkst uit door de actie te gebruiken. En de toepassingen reiken ver buiten de natuurkunde: het principe kan ook voor allerlei wiskundige problemen gebruikt worden.

Zijn er dan ook nadelen? Jazeker. Sommige bewegingsvergelijkingen kunnen *niet* via dit principe verkregen worden. De Navier-Stokesvergelijkingen uit de vloeistofdynamica zijn een notoir voorbeeld. Bovendien moet je systeem aan bepaalde wiskundige voorwaarden voldoen.[6] Dit zijn echter uitzonderingen.

Mocht je dus ooit weer eens vlak voor een tentamen of een verplicht huiswerk kansloos op de bank het studeren uitstellen, dan kun je je troosten met de gedachte dat deze instelling een fundamenteel aspect van ons universum lijkt te zijn. •

## Referenties


[1] Marion en Thornton. “Classical dynamics of particles and systems”.

[2] Aldrovandi en Pereira. “Notes for a course on classical fields”.

[3] Neuenschwander, Taylor en Tuleja. “Action: forcing energy to predict motion”.


[5] Wanneer kwantumfluctuaties dit principe verhinderen, hebben we te maken met zogenaamde ‘anomalieën’; kennelijk waren mensen in het begin nogal geschokt door dit verschijnsel.

[6] Je systeem moet bijvoorbeeld holonomisch zijn, wat betekent dat je randcondities integreerbaar moeten zijn. Bovendien mogen je randcondities geen arbeid op het systeem uitoefenen. Zo zijn er nog een paar subtiele voorwaarden.

# Duurzaamheid, één aspect

*Bodem-energieopslag*

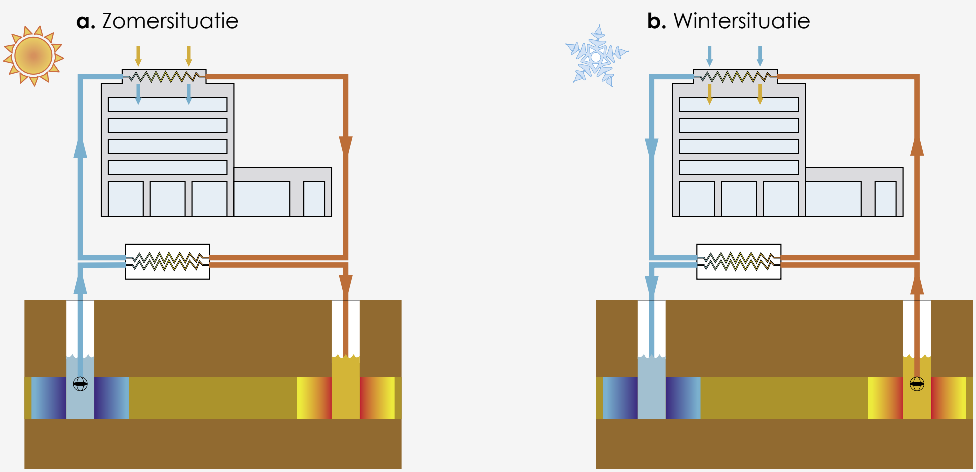
DOOR **LEO DE RUIJSSCHER**

Het is nog maar zeer recent dat milieuexperts de wereld alarmeerden over de opwarming van de aarde. Een aantal vooraanstaande mensen versnelde de bewustwording daarover vanuit diverse invalshoeken. Zo was de documentairefilm 'An Inconvenient Truth' (2006), gepresenteerd door Al Gore, een wrede wake up call wat betreft global warming.

De bewustwording over het opraken van fossiele brandstoffen en het uitputten van grondstoffen werd in 2002 gekatalyseerd door de publicatie van het boek 'Cradle to Cradle' (C2C). Hierin bepleiten architect Michael Braungart en biochemicus William McDonough uitdagende uitgangspunten (afval = voedsel) voor het ontwerpen en ontwikkelen van producten op basis van veilige en volledig herbruikbare grondstoffen. Ligt er bij de mens in het algemeen een grote verantwoordelijkheid om die uitdagingen aan te gaan, in de wereld van de bouw ligt die verantwoordelijkheid er in het bijzonder. Onderzoek en onderwijs in het verder ontwikkelen en implementeren van bovengenoemde processen vinden dan ook op steeds grotere schaal plaats.

## Duurzaamheid

Nog altijd draagt de wereld de consequenties van de industriële revolutie die rond 1900 op gang kwam. Door het massaproductiesysteem worden lucht, water en aarde al jarenlang met giftige stoffen verontreinigd, ontstaat een nauwelijks meer te verwerken hoeveelheid afvalstoffen, en raken onze natuurlijke bronnen volledig uitgeput. Een angstaanjagend resultaat, ondanks de welvaart die deze revolutie een groot aantal mensen gebracht heeft. Tot het inzicht gekomen dat het op onze planeet anders moet, beter en gezonder, is een nieuwe generatie opgestaan met een andere zienswijze. En die zal uiteindelijk de 'oude' industriële revolutie ombuigen naar een nieuwe industriële revolutie. Een

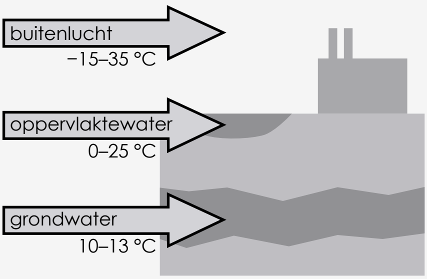



**FIGUUR 2** Een open bron

revolutie van duurzaamheid. Een van die nieuwe revolutionaire concepten is bodem-energieopslag.

## Bodem-energieopslag

Op een diepte van 100 tot 200 m stromen vrijwel overal zogenaamde *aquifers* (figuur 1): ondergrondse waterbassins met een vrijwel constante temperatuur van circa 12 °C. Als vuistregel wordt gebruikt dat de bodemtemperatuur met 1 °C stijgt bij elke 100 m dieper. De voorkeur om opslag in de bodem te verkiezen boven de ons omringende lucht en het oppervlaktewater is ingegeven door deze min of meer constante temperatuur: de bodem is een goede isolator.




**FIGUUR 1** Temperatuurbereiken

WKO (warmte-koude opslag), ook wel bodem-energieopslag genoemd, is een manier om onze gebouwen duurzaam te kunnen verwarmen en koelen. Het principe is als volgt. Er worden twee bronnen gebruikt (figuur 2), een warme (16 tot 18 °C) en een koude (6 tot 8 °C). In de winter wordt de warmte uit de warme bron benut om via een warmtewisselaar het gebouw te verwarmen. Na afgifte wordt het afgekoelde water in de koude bron geïnjecteerd. In de zomer wordt dit proces omgekeerd: het water uit de koude bron wordt gebruikt om het gebouw te koelen en daarna in de warme bron gepompt. Deze vorm van lage-temperatuurenergievoorziening kan direct worden toegepast voor het verwarmen en koelen van gebouwen met een lage energievraag (passieve vorm). Bij gebouwen met een gemiddelde of hoge energievraag is een warmtepomp noodzakelijk (actieve vorm).

Inmiddels kent dit type met open bronnen varianten met gesloten bronnen, waarbij gebruik gemaakt wordt van horizontale en verticale bodemcollectors. Door deze collectors stroomt een vloeistof die warmte onttrekt of afgeeft aan de bodem, afhankelijk van het seizoen. Als alternatief worden ook wel slangen in heipalen gevat waardoor een gesloten systeem wordt verkregen. Om gesloten systemen op grote diepte te verkrijgen, wordt ook gebruik gemaakt van de zogenaamde boorgatmethode. Bij deze methode worden gaten geboord van 300 m diep waarin slangen worden aangebracht. Ongeacht welk type bron: het principe blijft hetzelfde.

Iedere methode heeft haar eigen voor- en nadelen en een bijbehorende effectiviteit. Hierdoor zijn voorafgaande studies, in samenhang met de beoogde toepassingen, over de bodemgesteldheid noodzakelijk. De keuze tussen een open of gesloten systeem zal gemaakt worden op basis van parameters als investeringskosten, exploitatielasten, rendementen en onderhoud- en regelgevingaspecten.

In het kader van de Grondwaterwet eist de overheid een vergunning voor systemen met een capaciteit van meer dan 10 $m^3$/uur. Deze capaciteit kan per provincie verschillen. Waar vroeger volstaan werd met een meldingsplicht, kan er nu niet zomaar worden aangenomen dat men een vergunning zal krijgen. Van tevoren moet er door een gespecialiseerd bureau gedegen onderzoek worden verricht, onder andere op het gebied van bodemgesteldheid. Verder is men verplicht de energiestromen dusdanig te controleren dat er geen energetische onbalans ontstaat hoger dan 10%. In dat geval is er sprake van zogenaamde thermische vervuiling. Er moet worden gestreefd naar een nulbalans.

## Warmtepomp

Het volgende voorbeeld over de werking van de warmtepomp gebruik ik bij mijn studenten regelmatig. De herkenbare situatie geeft vaak het noodzakelijke inzicht. Stel je een koelkast voor met een flesje bier erin. De elektriciteit (het aandrijfvermogen) zorgt dat een compressor met een koudemiddel de warmte uit het bier haalt: het bier wordt koud. De warmte uit het bier én het flesje wordt uiteindelijk afgegeven aan de condensor die aan de achterzijde van de koelkast is gemonteerd. Deze warmte wordt aan de omgeving (keukenruimte) afgegeven. Zo werkt ook een warmtepomp: door het aquiferwater te koelen van circa 12 °C tot, zeg circa 7 °C, komt er bruikbare energie aan de gebouwkant vrij die gebruikt kan worden voor het verwarmen van het gebouw.

De prestatie van een warmtepomp is op de volgende manier aan te geven. De thermische energie uit de bodem kan voor 100% nuttig gebruikt worden, maar er is bijvoorbeeld 25% elektrische energie nodig om de 75% aanwezige energie om te zetten naar 100% nuttige energie. Hierdoor ontstaat er een *coefficient of performance* (COP) van (nuttige warmte/aandrijfenergie) 100/25 = 4.

## Energiedak

Een extra duurzame energie-opwekking kan worden verkregen door het installeren van een energiedak. Door leidingen in het dakoppervlak te integreren wordt water overdag door zonnewarmte opgewarmd en gedurende de nacht afgekoeld. Via warmtewisselaars wordt de energie ter beschikking gesteld aan de warmtepomp, of opgeslagen in de bodem voor later gebruik. Dit is tevens een instrument om de hiervoor beschreven vereiste energiebalans in de bodem te waarborgen.

## Gebouwinstallaties

Het is noodzakelijk dat energievoorziening en installatieconcept van een gebouw op elkaar zijn afgestemd. Alle installaties dienen daarom gebaseerd te zijn op een zogenaamd laag temperatuurtraject. Ten grondslag aan dit uitgangspunt ligt de wijze waarop de energie-afgifte in de ruimten plaatsvindt. Immers, de afgifte van energie wordt bepaald door het temperatuurverschil tussen de ruimte en het warmte-afgevend oppervlak, evenals de grootte van dit oppervlak. Bij een hoog temperatuurtraject is een klein oppervlak voldoende; bij een laag temperatuurtraject is een groot oppervlak noodzakelijk. Dit is het verschil tussen het oppervlak van een radiator (hoog temperatuurtraject) en het vloeroppervlak bij vloerverwarming (laag temperatuurtraject).

Belangrijk is te vermelden dat de noodzaak voor een goed ventilatiesysteem met grote regelmaat wordt onderschat. Vloerverwarming en betonkernactivering zorgen, tezamen met een goede akoestiek en het voorkomen van tocht, uitsluitend voor een comfortabel gebouw. Voor een gebouw dat bovendien gezond is, is een luchtbehandelinginstallatie nodig die is afgesteld op 100% frisse buitenlucht (uiteraard met warmteterugwinning).

## $CO_2$-neutraal

Technisch en economisch is het mogelijk om energie voor verwarming en koeling verder terug te dringen dan de overheid op dit moment als eis stelt. De extra investeringen zorgen voor een blijvend effect op de onderhoudskosten en een blijvend lage energieconsumptie, en hebben een zeer acceptabele terugverdientijd. Daarnaast ontstaat door het gebruik van deze laagtemperatuursystemen een prettig woon- en werkcomfort.

Door het plaatsen van PV-cellen (*photovoltaics*) wordt gedurende daglicht elektriciteit opgewekt. Door een deel van deze elektriciteit terug te leveren aan het openbare net wordt de elektriciteit die nodig is gedurende de nacht gecompenseerd. De mate van compensatie is dus afhankelijk van de hoeveelheid geïnstalleerde PV-cellen, en deze kunnen theoretisch de aandrijfenergie volledig compenseren. Hierdoor is er sprake van een energie- en $CO_2$-neutrale optie.

## De nieuwe aanpak

De sinds een aantal jaren bekende duurzame energieaanpak, zoals in 1996 verwoord in de Trias Energetica in opdracht van het ministerie van VROM, is aan vernieuwing toe. Een nieuwe aanpak wordt beschreven in de Rotterdam Energy Approach and Planning (REAP), die binnen het Rotterdam Climate Initiative is ontwikkeld. Hieronder is in grote lijnen het verschil aangegeven tussen de bestaande en de nieuwe aanpak.

Door de brede discussie en het meer zichtbaar en inzichtelijk maken van de samenhang tussen technische vakken en bestuurlijke zaken is de belangstelling voor Technisch Wetenschappelijk Onderwijs aanzienlijk toegenomen. Steeds vaker wordt gezocht naar de onderliggende $CO_2$-footprint. Steeds vaker wordt er gevraagd om bij projecten vooraf de milieueffecten en de energieprestatiecoëfficiënten (duurzaamheidsbeoordelingsmethode) aan te geven. Om die vraag te beantwoorden wordt gebruik gemaakt van programma's als Breeam, Greencalc, GPR en vele andere. De recent opgezette Dutch Green Building Council maakt zich sterk om enige uniformiteit in deze nieuwe en complexe, maar noodzakelijke materie te verkrijgen.

## De Bernoulliborg

Het architectenbureau De Zwarte Hond heeft een bijzonder mooi gebouw ontworpen voor de Rijksuniversiteit Groningen: de Bernoulliborg. Dit gebouw maakt al gebruik van bodem-energieopslag, maar het is de bedoeling dat deze techniek in 2013 op bijna het gehele Zerniketerrein zal worden toegepast. Met dit soort toepassingen kan de in gang gezette nieuwe, tweede revolutie naar duurzaamheid verder gestalte krijgen. Ik raad studenten aan om zich eens verder in deze materie te verdiepen. Immers, na bewustzijn is er plaats voor kennis. En die kan weer resulteren in de uiteindelijke wijsheid die we zoeken: de noodzakelijke wijsheid om de ideeën van Cradle to Cradle verder om te zetten in realiteit. •


### Over de auteur

Leo de Ruijsscher RI ONRI is docent aan de faculteit Bouwkunde van de Technische Universiteit Delft in de leerstoel Climate Design and Sustainability. Integraal ontwerpen vanuit de metafoor van de architect is zijn drijfveer naar duurzaamheid. Tevens is hij algemeen directeur van De Blaay-Van den Bogaard Raadgevende Ingenieurs, een gespecialiseerd adviesbureau op het gebied van energie- en installatieconcepten in de bebouwde omgeving.

| **Bestaande aanpak** | **Nieuwe aanpak** |
|---|---|
| a. Reductie van energieverbruik | a. Reductie van energieverbruik; toepassing van een intelligent bio-klimaatontwerp |
| b. Gebruik van nieuwe technieken | b. Hergebruik van energieafvalstromen |
| c. Overig gebruik door middel van schone en efficiënte fossiele brandstoffen | c. Gebruik van nieuwe energiebronnen (afval wordt voedsel) |

# Kunst ∩ Wetenschap

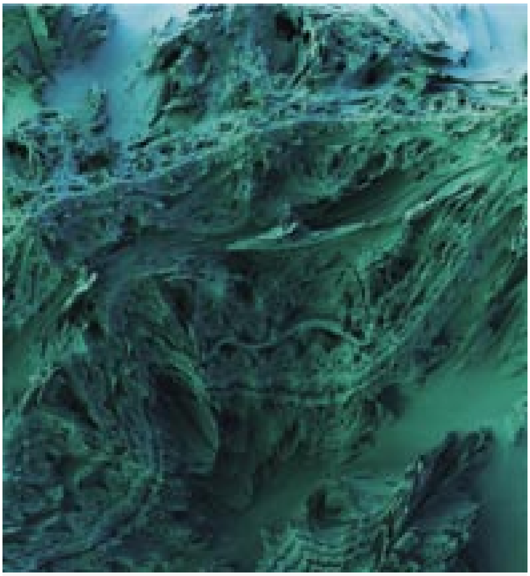
DOOR **JOB VAN DER ZWAN**

Lang geleden deed ik een dappere doch mislukte poging tot het studeren van het wonderschone vak natuurkunde. Inmiddels ben ik overgestapt en studeer ik al drie jaar aan de kunstacademie Minerva te Groningen, met meer succes.

Als ik mensen vertel dat ik ben overgestapt van natuurkunde naar de kunstacademie is de reactie altijd hetzelfde: "Goh, dat is wel héél iets anders!"

Maar waarom eigenlijk? Alsof men een bepaald beeld heeft van kunst, en een bepaald beeld heeft van bètawetenschappen, en dat daarvoor geldt: Kunst ∩ Wetenschap = ∅.

Cultureel beter opgevoede mensen komen soms nog wel eens aanzetten met {Theo Jansen}. Is dit beeld terecht? Ik heb me hier natuurlijk erg in verdiept sinds de overstap.



De Mandelbulb (detail)

Er is wel een enorm cultuurverschil. Bij mijn overstap merkte ik het meteen: ik ging van het ene door de maatschappij onbegrepen eiland naar het andere. Het verschil is gigantisch, en net als nerds bij de bètastudies voldoen kunstenaarsstudenten veel te vaak aan de stereotypen. Bijna iedereen zegt lachend dat ze altijd heel slecht waren in wiskunde en natuurkunde, waar ik de humor nooit van zal begrijpen. Tenzij ze het terechte gevoel proberen weg te lachen dat ze iets prachtigs missen.

Ze hadden meer met tekenen, schilderen, dansen en meer van die alfadingetjes die naar het schijnt de meeste bèta's dan weer missen; ik ben waarschijnlijk de enige leerling op Minerva die voordat hij daar kwam helemaal niets met kunst had. Dat dat niet vaker voorkomt is natuurlijk wel te verwachten. Het aantal leerlingen dat zegt iets met wetenschap te hebben is op één hand te tellen. Dit culturele aspect is heel belangrijk: de cultuur van een vakgebied is mede bepalend voor wat dit produceert. En als er één vakgebied een afspiegeling van cultuur is, is het kunst.

Het stomme is natuurlijk dat de meeste vernieuwing in de kunst een reactie is op maatschappelijke veranderingen, technische vooruitgang en opkomende filosofische ideeën. Oftewel: allemaal dingen die (deels) voortgestuwd worden door nieuwe wetenschappelijke inzichten. Er is dus altijd wel een link geweest tussen kunst en wetenschap.

Sinds enkele jaren zijn er verscheidene kunstopleidingen die beweren zich ook meer met wetenschap bezig te houden, zoals de ArtScience opleiding in Den Haag. Meestal zijn dit echter vooral kunstacademies die zich bezighouden met het verkennen van de mogelijkheden van nieuwe technieken. Echt wetenschappelijk zou ik het niet direct durven noemen.

## Glitter

Volgens mij zal de wetenschappelijke diepgang in een kunstwerk nooit meer zijn dan wat de kunstenaar begrijpt over de wetenschap. Of eigenlijk: wat hij dénkt te begrijpen, en daar lijkt het wel eens mis te gaan. Ik heb het nu specifiek over kunstenaars die wetenschappelijke inspiratiebronnen beweren te hebben. Escher, om een tegenvoorbeeld te noemen, had weinig wiskundige kennis: hij had een intuïtief gevoel voor symmetrie, waar wiskundigen dan weer allerlei interessante dingen in zagen. Maar daar heb ik het dus niet over. Ik bedoel de momenten waarop een kunstenaar zijn werk uitlegt, en vervolgens een 'wetenschappelijk' onzinverhaal houdt, waarbij de overige aanwezigen meestal instemmend meeknikken, alsof ze het helemaal begrijpen, en dan er vervolgens nóg wetenschappelijk onverantwoorder op inhaken.

Zo was er een jongen die zei dat hij zich erg liet inspireren door kwantummechanica. Als het goed is gaan er nu bij de lezer al allerlei alarmbelletjes rinkelen, want als er één onderwerp is waar mensen onzinnige uitspraken over doen … Enfin, hij geloofde dat kwantummechanica een theorie was die stelde dat alles eigenlijk bestond uit piepkleine deeltjes energie. Dit had hij verwerkt in een schilderij met een geschilderde hand *door glitter op de geschilderde hand te plakken*. Dit moest dan een wetenschappelijk geïnspireerd kunstwerk voorstellen.

Het heeft dan geen zin om zo'n jongen een samenvatting van de kwantummechanica te geven (als zoiets al mogelijk zou zijn). Zijn interesse gaat namelijk niet uit naar begrijpen hoe die theorie werkt. Waarschijnlijk is hij juist geïnteresseerd in zijn onbegrip voor die wetenschap, en hoe dat hem de ruimte geeft om er dan maar alles van te maken wat hij wil. Voor de kunst is dat op zich prachtig, het is alleen verschrikkelijk dat dat dan wordt losgelaten op iets dat lijnrecht tegenover die manier van denken staat: de wetenschap. Hij heeft ook niet per definitie een slecht kunstwerk gemaakt: het gaat over zijn beeld van een universum waar alles uit energie bestaat, wat zijn definitie van energie dan ook zijn moge. Glitter blijkbaar. Dat zou interessant kunnen zijn.

## Vincent Icke

Andersom geldt eigenlijk hetzelfde: bèta's die kunst (beweren te) maken komen ook niet verder dan hun inzichten over wat kunst is, en scoren dan meestal niet veel beter.

Ook hier moet ik enige nuance aanbrengen: de wetenschap levert ons prachtige beelden op, die esthetisch niet onderdoen voor kunst. Kijk bijvoorbeeld naar een recente ontwikkeling in 3D-fractals (zie de figuur links). De meest intrigerende beelden komen daar uit. En ik heb het ook niet over wetenschappers die in hun vrije tijd wel eens een landschapje of stilleven schilderen. Nee, ik bedoel de wetenschappers die hun wetenschappelijke interesse in een kunstzinnig concept beweren te verwerken. Een voorbeeld is Vincent Icke, die naast hoogleraar theoretische sterrenkunde aan de Universiteit Leiden en bijzonder hoogleraar kosmologie aan de Universiteit van Amsterdam ook kunstenaar is (of naar mijn onversneden mening: wil zijn). Hij wil bijvoorbeeld een installatie maken op basis van het principe van Huygens. Een elliptische vijver, met in de brandpunten golfgenerators. Oké, leuke visualisatie van een natuurkundig principe. Maar wat is het kunstzinnige er aan? Je ziet het principe van Huygens en … klaar. Er is geen gelaagdheid. Je zou er geen filosofisch gesprek bij kunnen voeren. De eerder genoemde fractal-kunst zet je tenminste nog aan het denken over wat complexiteit eigenlijk is.

Het is moeilijk om precies uit te leggen waar Icke de mist in gaat als kunstenaar, deels omdat kunst zelf ook geen exacte wetenschap is. Wanneer is iets kunst? De meest gangbare definitie schijnt tegenwoordig te zijn: 'dat wat de kunstenaar als kunst bedoeld heeft'. Dat maakt het begrip zo ruim dat het misschien zinniger is om het te hebben over wanneer iets een *goed* kunstwerk is, dan *of* het een kunstwerk is. Daarbij wordt meestal uitgegaan van de intentie van de kunstenaar, en in hoeverre hij of zij slaagt in het verwerken van die intentie (veel te kort-door-de-bocht gezegd; het is niet voor niets een opleiding van vier jaar).

Zo bekeken is het idee van Icke niet zo sterk. Waar het hem eigenlijk om draait is zijn fascinatie voor het principe van Huygens. Dat wil hij ons ook laten beleven. Vervolgens laat hij ons dat principe zien, zonder verdere aanpassingen. Wat hij dus niet doet is een vertaalslag maken waardoor ons duidelijk wordt wát er nou zo fascinerend aan moet zijn. Natuurlijk, ‘wij’ bèta’s weten dat wel, en wij zullen vast zeer gefascineerd blijven kijken naar die golven. Voor mensen die niets met bètawetenschappen hebben heeft het echter niets extra’s om ze meer te fascineren dan de theorie van zichzelf al (niet) doet. Sterker nog, veel mensen knappen waarschijnlijk juist af omdat wat ze zien *te* voor de hand liggend is: ze krijgen een puzzel te zien die al opgelost is. Dat is niet erg prikkelend, net zoals de eerder vermelde jongen eigenlijk juist niet wil snappen hoe kwantummechanica werkt.

Wetenschap en kunst proberen wel samen te komen, maar dat lukt (naar mijn mening) niet helemaal goed. Het probleem zit hem in de manier van denken. Denk ik. Kunst heeft heel andere criteria dan wetenschap, en er is nogal snel sprake van miscommunicatie tussen de twee vakgebieden omdat ze heel andere doelen voor ogen hebben. Helderder dan dit kan ik het eigenlijk

Oorspronkelijke foto

Opgerekte foto

Details van een foto van de omgeving van Huis de Beurs, gemaakt met een scanner.

niet formuleren, want zoals gezegd: de discussie over wat kunst is, is geen exacte wetenschap.

Er zijn natuurlijk genoeg kunstenaars en wetenschappers die er wel in slagen om kunst en wetenschap te combineren. De eerder genoemde Theo Jansen is een van de beroemdste Nederlandse voorbeelden. En als je terugblikt op de kunstgeschiedenis denk je natuurlijk aan Leonardo Da Vinci.

## Scannen

Ikzelf, hoewel niet van het niveau van deze twee helden, begeef me ook op het raakvlak van kunst en wetenschap. Zo heb ik bijvoorbeeld een camera gemaakt van een flatbed-scanner. Omdat deze de foto streepje voor streepje neemt zorgt dit voor vervormingen in de tijd. De techniek is eigenlijk al een paar decennia oud. Ik heb één nieuwe handeling toegepast: in plaats van het onderwerp langzaam door de scanner te bewegen, zodat deze oprekt in het beeld, rek ik het beeld op zodat het onderwerp weer 'normaal' tevoorschijn komt. In het echt is deze opgerekte foto een enkele meters groot panorama, dus waarschijnlijk komt het in deze Periodiek niet helemaal tot zijn recht.

Laten we het even over iets heel anders hebben: de relativiteitstheorie. Die stelt dat niets sneller dan het licht kan. Hoe dichter je bij de lichtsnelheid komt, hoe meer de omgeving samengedrukt lijkt vanwege de Lorentz-Fitzgerald contractie. Maar stel dat je wel sneller dan het licht zou kunnen, wat zou je dan zien? In een fractie van een seconde zou iets aan je voorbij vliegen, maar gek genoeg: omdat datgene sneller dan het licht zou gaan, zou het zijn eigen licht inhalen (want in een ander frame sta jij stil en beweegt dat ding). Als we even doen alsof je dan niet die fotonen zou absorberen, maar ze zou passeren (hey, we zijn toch al de natuurkunde kapot aan het maken in dit gedachtenexperiment), dan zou het voor ons dus lijken alsof het object dat sneller dan het licht aan ons voorbij ging, terug in de tijd de andere kant op leek te gaan.

Bekijk de eerste foto nog eens. Hoe komt het dat die mensen zo samengeperst in beeld staan? En kijk nou nog eens goed naar die tweede foto. Valt je niet op dat er fietsers haaks op de straat lijken te staan? Waardoor zou dat zo zijn?

Of mijn werk nou beter is dan dat van Vincent Icke of de naamloze glitterkunstenaar laat ik aan de lezer over. Ik ben in elk geval nog steeds op zoek naar een goede balans tussen het denken als een kunstenaar en het denken als een wetenschapper.

## Newton zag eens appels vallen

Newton zag eens een appel vallen, en bij het vallen vroeg hij zich af waarom die appel naar beneden viel, en niet naar boven, of opzij. Dit inspireerde hem tot het nadenken over de werking van de zwaartekracht, en we weten waar dat toe geleid heeft. Laten we eens doen alsof zijn *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* een kunstwerk is. Dit zou een mogelijke omschrijving van dit kunstwerk zijn:

> *Newton zag een appel vallen zoals nog nooit iemand eerder dat gedaan had. In plaats van zomaar te accepteren dat dingen nu eenmaal naar beneden vallen, legde hij de verbanden tussen de val van die appel en de beweging van de planeten. Met zijn ideeën over beweging en zwaartekracht daagt hij ons uit anders te kijken naar de wereld om ons heen, naar de bewegende en stilstaande lichamen rondom ons.*

Iedereen die ooit een omschrijving van een kunstwerk gelezen heeft ziet het cliché waar de bovenstaande lap tekst mee doordrenkt is. Daarmee illustreert ze hopelijk wat het raakpunt van kunst en wetenschap is: ons prikkelen tot nadenken. In veel gevallen lukt dat prima zonder elkaar, in sommige gevallen kan het ene het andere inspireren, en soms, heel soms, vullen ze elkaar aan. •

## Referentie

Figuur: Daniel White. "Mandelbulb."
www.skytopia.com/project/fractal/mandelbulb.html

# Bitflips geen bezwaar

DOOR **ANNEROOS EVERTS**

Om informatie te verzenden kun je gebarentaal, morsecode of rooksignalen gebruiken. In dit digitale tijdperk gebruiken we vooral binaire codes, oftewel rijtjes enen en nullen. Soms verandert tijdens het verzenden van de data een 0 in een 1 of andersom, waardoor de hele betekenis kan veranderen. Met coderingstheorie probeert men dat te voorkomen: zelfs als een paar bits veranderen moet de boodschap toch goed aankomen.

Coderingstheorie is dus wat anders dan cryptografie, waarbij de boodschap geheim moet blijven voor buitenstaanders. Om te zorgen dat zo'n rijtje enen en nullen goed aankomt, worden vaak meer symbolen meegestuurd dan strikt noodzakelijk. Deze extra bits heten pariteitsbits en deze hangen af van de originele databits die je wilt sturen. Als er dan een bit verandert, kloppen de pariteitsbits niet meer bij de rest en zie je dat er ergens iets fout is gegaan.

De manier waarop informatie wordt omgezet in een rijtje databits en pariteitsbits heet een code. Sommige codes kunnen niet alleen kleine fouten herkennen, maar ze ook verbeteren. Een mooi voorbeeld van een foutverbeterende code is de Reed-Solomon code, die wordt gebruikt op audio-cd's. Leesfouten kunnen tijdens het afspelen verbeterd worden, zodat je er niets van hoort tijdens het luisteren.

## De wiskunde achter codes

In de wiskunde is een binaire code $C$ een deelverzameling van alle mogelijke rijtjes enen en nullen van lengte $n$. Een rijtje $c = (c_1, \dots, c_n)$ wordt een codewoord genoemd als het in de code voorkomt, en de $c_1, \dots, c_n$ heten de coëfficiënten van $c$.

De code heet lineair als de coördinaatsgewijze som van twee codewoorden ook weer een codewoord is. De code is dan een deelruimte van de vectorruimte bestaande uit alle mogelijke rijtjes enen en nullen. De code heeft dus een dimensie $k$. Dat betekent ook dat de code een basis heeft, en die codewoorden noemen we de voortbrengers van de code. Elk codewoord uit de code is dan te schrijven als unieke lineaire combinatie van de $k$ voortbrengers. De code heeft dus in totaal $2^k$ codewoorden.

Een voorbeeld van een simpele lineaire tweedimensionale code is $C_1 = \{(0,0,0,0), (1,1,0,0), (0,0,1,1), (1,1,1,1)\}$. Je kunt nagaan dat $C_1$ een lineaire code is; de som van het tweede en het vierde woord is bijvoorbeeld gelijk aan het derde woord. Als voortbrengers zou je dus deze woorden kunnen nemen.

Tussen twee codewoorden $x$ en $y$ definiëren we de Hammingafstand $d_H(x,y)$ als het aantal plekken waarop de codewoorden verschillen. Dus

$$d_H(x,y) = \#\{i \mid x_i \neq y_i\}.$$

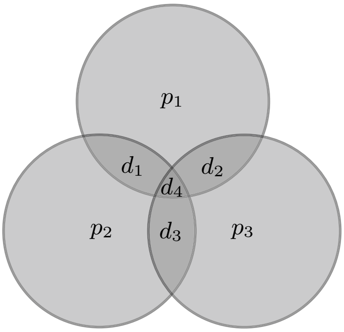
Zo is de afstand tussen $(1,1,0,0)$ en $(1,1,1,1)$ gelijk aan 2. De minimumafstand $d$ van een code $C$ is gedefinieerd als de kleinste afstand die voorkomt tussen twee verschillende codewoorden, oftewel

$$d = \min\{d_H(x,y) \mid x, y \in C, x \neq y\}.$$

Het gewicht $w(x)$ van een codewoord $x$ is het aantal coëfficiënten $x_i$ die niet nul zijn. Het minimumgewicht is gelijk aan het kleinste gewicht (ongelijk aan nul) dat voorkomt in een code.

Een code van lengte $n$, dimensie $k$ en minimumafstand $d$ noemen we een $[n,k,d]$-code. Hoe groter de minimumafstand, hoe beter. Stel bijvoorbeeld dat de minimumafstand van een code 5 is. Als er tijdens het transport van een codewoord dan twee bits veranderen, dan kunnen we nog steeds zien wat het oorspronkelijke codewoord zou moeten zijn. Dit is namelijk het woord dat de kleinste afstand heeft tot het ontvangen woord. In het algemeen geldt dat we bij een $[n, k, d]$-code tot $\frac{1}{2}d$ bitfouten kunnen detecteren en tot $\frac{1}{2}(d-1)$ bitfouten kunnen verbeteren. Daarom willen we de minimumafstand zo groot mogelijk hebben.

Een nadeel van een grote minimumafstand is echter dat je dan veel meer bits stuurt dan strikt noodzakelijk, wat niet erg efficiënt is. Het is dus zoeken naar de juiste verhouding tussen efficiëntie en foutverbeterend vermogen, die natuurlijk per toepassing verschilt.




## Hammingcode

Een bekend voorbeeld van een lineaire code is de Hammingcode van lengte 7. Deze code werkt als volgt. Bij een viertal databits $d_1, d_2, d_3$ en $d_4$ zoeken we drie pariteitsbits $p_1, p_2$ en $p_3$ zodat elke cirkel in de figuur een even aantal enen bevat. Een codewoord $c = (d_1, d_2, d_3, d_4, p_1, p_2, p_3)$ moet dus voldoen aan de volgende drie vergelijkingen:

$$\begin{aligned} d_1 + d_2 + d_4 + p_1 &\equiv 0 \pmod 2 \\ d_1 + d_3 + d_4 + p_2 &\equiv 0 \pmod 2 \\ d_2 + d_3 + d_4 + p_3 &\equiv 0 \pmod 2. \end{aligned}$$

Het woord $x = (1, 0, 1, 0, 1, 0, 1)$ zit bijvoorbeeld in de code.

Aan de figuur zie je dat de verandering van één bit van je databits op minstens twee cirkels invloed heeft en er dus minstens twee bits mee moeten veranderen om weer een nieuw codewoord te vormen. De minimale afstand van de Hammingcode is dus drie. Verder is het een lineaire code, want de vergelijkingen zijn zelf lineair. Omdat we vier databits kunnen kiezen, zijn er $2^4 = 16$ codewoorden en heeft de code dimensie 4.

## Cyclische codes

Een $[n, k]$-code heet cyclisch als het een lineaire code is met als eigenschap dat een cyclische verschuiving van de coëfficiënten weer een codewoord oplevert. Oftewel, als $(c_1, \ldots, c_n)$ in de code zit, dan zit $(c_n, c_1, \ldots, c_{n-1})$ er ook in. Deze cyclische structuur maakt het coderen en decoderen makkelijk. Een simpel voorbeeld van een cyclische code is de evengewichtscode, die bestaat uit alle woorden met een even aantal enen.

De Hammingcode kan in cyclische vorm worden geschreven door de bits te herordenen, bijvoorbeeld: $\tilde{c} = (p_1, p_3, d_4, d_2, d_1, p_2, d_3)$. Als we bijvoorbeeld het codewoord $x$ in deze vorm schrijven krijgen we $\tilde{x} = (1, 1, 0, 0, 1, 0, 1)$, en als we die cyclisch doorschuiven krijgen we $(1, 1, 1, 0, 0, 1, 0)$. Door de bits in te vullen in de cirkels zie je dat dit weer een codewoord is.

## Leefsoutje?

De kunst is dus om codes te maken die een grote informatiedichtheid hebben, maar ook veel fouten kunnen verbeteren. Verder wil je graag dat de code makkelijk te coderen en decoderen is. De Reed-Solomon code die op audio-cd's wordt gebruikt, is hier een mooi voorbeeld van. Hoewel bij LP's één krasje al gelijk het schijfje verpest, kan een cd heel wat meer hebben en hoor je niks van de meeste leesfouten.

Codes komen echter niet alleen bij computers en cd's voor. Een ander voorbeeld van een code die in het dagelijkse leven wordt gebruikt is de 11-proef bij bankrekeningnummers. Deze nummers bestaan uit 9 cijfers: $a_1, \ldots, a_9$. Als het een geldig bankrekeningnummer betreft, moet de som $9a_1 + 8a_2 + 7a_3 + \ldots + a_9$ deelbaar zijn door 11. Dat is handig, want als je dan per ongeluk een cijfer verkeerd typt, maak je niet per ongeluk geld over naar de verkeerde rekening. •

# Vorig Breinwerk

DOOR **PJOTR SVETACHOV**

We hebben vele inzendingen gehad voor het vorige breinwerk. De goede oplossing is hiernaast afgebeeld. Uit de goede inzendingen is Erik van Loon, die instuurde namens het bestuur van de studievereniging Marie Curie uit Nijmegen, als winnaar uit de bus gekomen. Hij ontvangt binnenkort het boek ‘Teleportatie en andere mysteries in de kwantummechanica’ door A. Zeilinger. •

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 2 | $^{5}$ 1 | 3 | 5 |
| $^{5}$ 2 | 3 | 5 | 4 | $^{6}$ 1 |
| 3 | 1 | 4 | 5 | 2 |
| 5 | 4 | $^{6}$ 2 | 2 | 3 |
| 1 | $^{0}$ 5 | 3 | 2 | 4 |

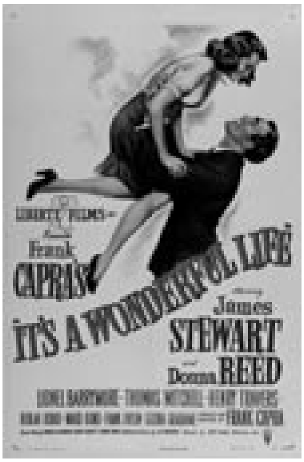
# Nieuw Breinwerk

DOOR **PJOTR SVETACHOV**

Elk jaar is het weer hetzelfde verhaal. Vlak voor kerst, als de elfjes van de kerstman klaar zijn met het maken van de cadeautjes, hebben ze niets te doen. Uit verveling besluiten ze om een rondje rond de wereld te rijden in de slee van de kerstman. En elk jaar krijgen ze het weer voor elkaar om de slee in prak te rijden. Het is zelfs nog erger geworden met de komst van Rudolph, die met zijn grote rode neus steeds maar denkt de leider te zijn. Dit pikken Dasher en Blitzen meestal niet, waardoor er steeds ruzie ontstaat. Bij een naderende schoorsteen wijkt de een naar rechts terwijl de ander naar links probeert te gaan. De arme elfjes, uitgeput van het maken van al het speelgoed, kunnen niet hard genoeg aan de teugels trekken en voor je het weet zitten ze allemaal rook te happen.

De kerstman heeft er genoeg van dat zijn elfjes terugkomen lijkend op Zwarte Pieten en ook nog eens zonder zijn slee. Daarom steekt hij er dit jaar een stokje voor. Het hele jaar door is hij onder zijn huis aan het graven geweest. Nu heeft hij een geheime garage onder zijn huis waar hij zijn slee verborgen houdt. Om de elfjes buiten te houden, kan de geheime deur naar zijn garage alleen opengemaakt worden door een ultrageheime toetscombinatie op een schilderij in te toetsen.

De kerstman heeft deze cijfercombinatie echter zo groot en complex gemaakt dat hij hem vergeten is. Zonder zijn slee zullen heel veel kinderen teleurgesteld zijn dat zij hun cadeau niet krijgen. Wel heeft hij ergens een briefje met aanwijzingen gevonden die de cijfercombinatie moeten prijsgeven. Helaas komt hij er zelf niet uit en heeft hij jouw hulp nodig! Kun jij de kerstman helpen om weer bij zijn slee te komen? Stuur de cijfers in de met letters gemarkeerde vakjes voor 30 januari op naar perio@fmf.nl. Onder de goede inzenders verloten we de magische film ‘It’s a Wonderful Life’. •

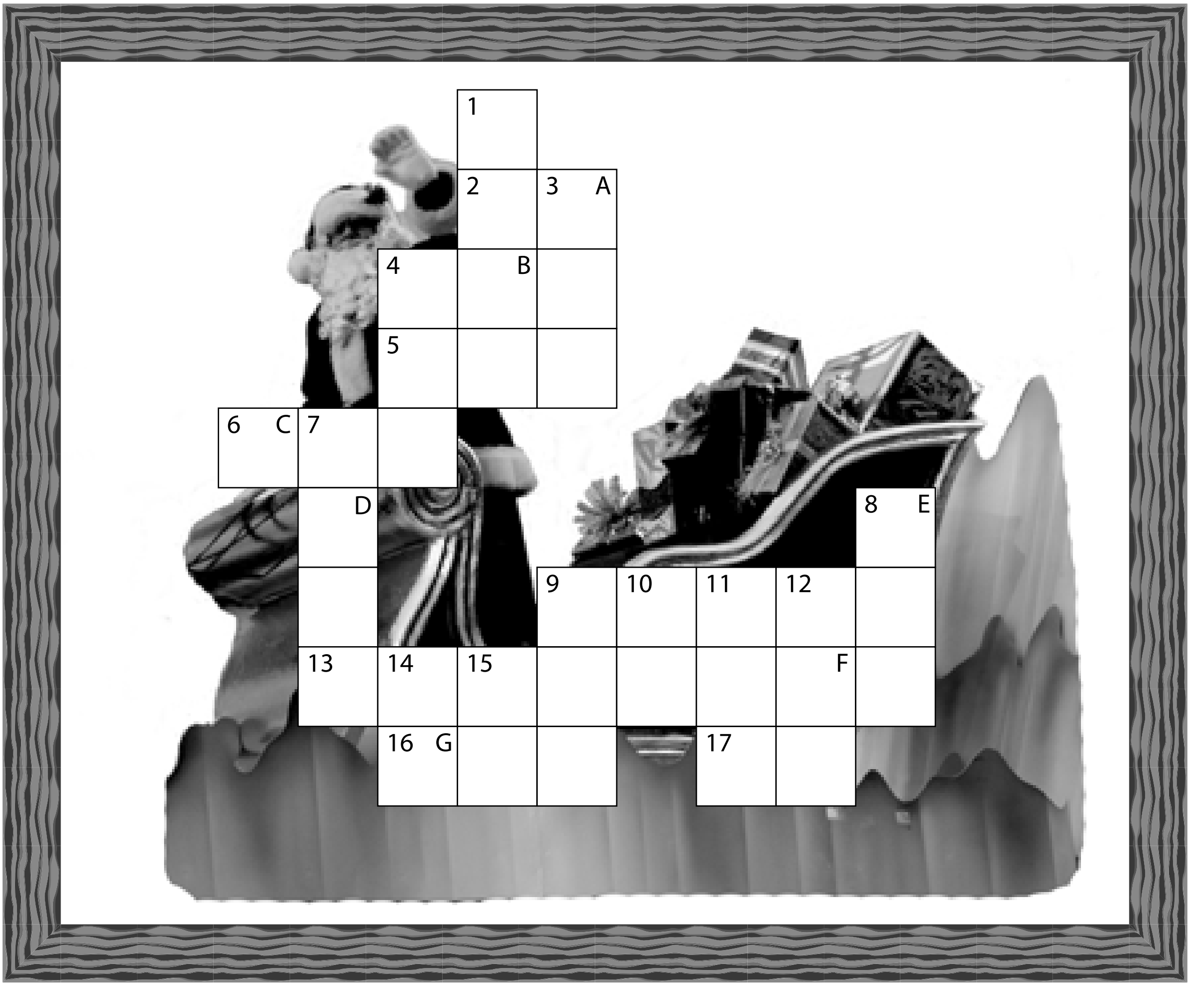


### Horizontaal

2. V14
4. Het eerste en laatste cijfer is hetzelfde
5. V10*9
6. H17*2
9. H13/V4
13. Strikt oplopend
16. De som van de cijfers is oneven
17. Priem

### Verticaal

1. V14*V3
3. De som van de cijfers is gelijk aan de som van de cijfers van V1
4. V9*6
7. Strikt aflopend met constante stapgrootte
8. V4/V9*H17
9. Het eerste en laatste cijfer is hetzelfde
10. Strikt oplopend
11. Strikt oplopend met constante stapgrootte
12. Strikt aflopend
14. Gelijke cijfers
15. Kwadraat



# Kokkerellen

DOOR **ELLEN SCHALLIG**

Maakten we de vorige keer een uitstapje naar de Italiaanse keuken, deze keer is het tijd voor Oost-Europa. Oekraïne, om precies te zijn.

Ga je naar Oost-Europa, dan is het bijna onvermijdelijk dat je een keer pelmeni, pierogi, varenyky, of een ander deeggerecht met vulling krijgt. Het idee is simpel. Je hebt plakjes deeg, bestaande uit een meelsoort, water en eieren, vult deze met een of andere vulling, vouwt ze dicht en kookt ze in water of bouillon gaar. Deze vullingen bestaan meestal uit kool, vlees, vis, paddestoelen of andere hartige dingen.

Mede-redactielid en huisrus Pjotr kwam met een boek over de Russische (en eigenlijk ook Oekraïense, Azerbeidjaanse, Georgische en Armeense) keuken aanzetten, en hierin stond een recept uit de Oekraïense keuken voor tongstrelende deegtoetjes gevuld met kersen. In Oekraïne noemt men de deegkussentjes *varenyky* (letterlijk: 'gekookte'). Omdat alleen een toetje (of tussendoortje) erg weinig is, besloten we om ook varenyky met zuurkool te maken.

Dit recept kost wat tijd: niet alleen moet het deeg een ruime twintig minuten rusten, ook het vullen en dichtmaken kost veel tijd. Trek hier een zondagmiddag voor uit en nodig je gasten uit om mee te helpen. Als iedereen een vaste taak heeft (rondjes steken, vulling scheppen, dichtvouwen), gaat het maken veel sneller. De hoeveelheid is ruim voldoende voor vier personen.

De moeilijkheid zit 'm erin dat het deeg zo dun mogelijk moet zijn, zonder dat de deegkussentjes tijdens het koken barsten. Ook moet je erop letten dat tijdens het koken het deeg niet aan elkaar gaat kleven. •

## Deeg

- 500 gram bloem
- 2,5 dl water
- 2 eieren
- 1 tl zout
- boter en zure room om erbij te serveren

Maak een soepel deeg van de bloem, het water, de eieren en het zout. Je kunt dit met een mixer met deeghaken doen. Als je die niet hebt, moet je je handen gebruiken. Laat het deeg dan 20 minuten rusten.

Strooi een beetje bloem op een schoon, droog aanrecht. Rol het deeg uit met een bebloemde deegroller (of goed schoongemaakte glazen fles als je geen deegroller hebt) tot een dikte van ongeveer 1,5 mm. Voor varenyky met kersen moet je het bij ongeveer 3 mm dikte houden.

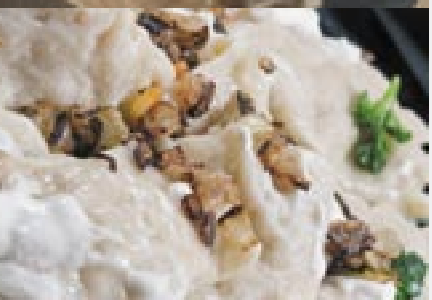
Steek met een glas rondjes uit en leg op elk rondje een schep vulling. Trek het rondje wat uit elkaar zodat je meer ruimte hebt om het dicht te vouwen, en leg de randen op elkaar. Druk dan de randjes op elkaar en knijp sommige stukjes een kwartslag gedraaid. Zo zorg je ervoor dat de vulling tijdens het koken niet uit het deeg loopt.

Leg de varenyky op een dun bebloemde ondergrond, voordat je ze in groepjes gaat koken. Hierdoor blijven ze niet aan de ondergrond kleven, waardoor ze stuk zouden kunnen gaan. Zorg er verder voor dat je de kussentjes niet te lang laat liggen voordat je ze kookt.

Zet een grote pan met ruim water op het vuur en wacht tot het water goed kookt. Doe de varenyky in de pan en roer voorzichtig door, zodat ze niet aan elkaar of de bodem plakken. Door de opwaartse beweging van het hete water zullen de kussentjes daarna niet meer aan de bodem plakken. Laat ze ongeveer 10 minuten koken. Als de varenyky boven komen drijven, moeten ze nog ongeveer 2 minuten.

Giet voor het serveren gesmolten boter over de varenyky en schep er zure room naast (niet bij de kersenvulling).

**Moeilijkheid:**
**Aantal personen:**
**Bereidingstijd:** ongeveer 2 uur



## Kersenvulling

- kersenvlaaivulling

In de winter kun je natuurlijk geen verse kersen krijgen. Daarom heb ik kersenvlaaivulling gebruikt. De gelei van de vlaaivulling kun je dan gebruiken om als saus over de varenyky te serveren. Ook kun je (zure) kersen op siroop gebruiken. Schep dan de kersen om met suiker naar smaak en laat een poosje staan.

Scheid de kersen van de gelei. Schep twee à drie kersen op een rondje. Zorg ervoor dat er zo weinig mogelijk gelei meekomt; dat kan ervoor zorgen dat de kussentjes niet dicht willen. Kook de kussentjes en serveer de gelei erover.

## Zuurkoolvulling

- 500 gram fijne zuurkool
- olie voor smoren
- 2 uien, gesnipperd
- boter
- 1 wortel, in stukjes
- peper en zout

Smoor de zuurkool 20 minuten in de olie. Fruit één ui en de wortel, en voeg dit samen met peper en zout aan de zuurkool toe. Laat dan nog 15 minuten smoren. De zuurkool moet dus in totaal 35 minuten in de pan hebben gezeten. Vul de varenyky met het zuurkoolmengsel, kook ze en serveer er in boter gebakken uisnippers bij.

Recept uit Culinaria Russia
ISBN 978-3-8331-4089-1

**Schut Geometrische Meettechniek** is een internationale organisatie met vijf vestigingen in Europa en de hoofdvestiging in Groningen. Het bedrijf is ISO 9001 gecertificeerd en gespecialiseerd in de ontwikkeling, productie en verkoop van precisie meetinstrumenten en -systemen.

Aangezien we onze activiteiten uitbreiden, zijn we continu op zoek naar enthousiaste medewerkers om ons team te versterken. Als jij wilt werken in een bedrijf dat mensen met ideeën en initiatief waardeert, dan is Schut Geometrische Meettechniek de plaats. De bedrijfsstructuur is overzichtelijk en de sfeer is informeel met een “no nonsense” karakter.

Wij zijn continu op zoek naar uitbreiding van de technische verkoop, software support en ontwikkeling van onze 3D meetmachines. Hierbij gaat het om functies zoals ***Sales Engineer***, ***Software Support Engineer***, ***Software Developer (C++)***, ***Electronics Developer*** en ***Mechanical Engineer***. Een combinatie van functies is ook mogelijk. Voor deze functies zijn ook stageplaatsen beschikbaar.


**Open sollicitaties:**
Open sollicitaties zijn altijd welkom.
Voor echt talent is er altijd ruimte.

Voor meer informatie kijk op www.Schut.com en Vacatures.Schut.com, of stuur een e-mail naar Sollicitatie@Schut.com.