



perio*diek

op regelmatige tijden terugkerend jaargang 2010 nummer 5

Inhoud

6 Kosmische stralen in Argentinië

Kosmische stralen, die uit het heelal komen, worden gedetecteerd in bijvoorbeeld het Pierre Auger Observatorium in Argentinië, dat 3000 km² groot is. Hoe, maar vooral: waarom?



20 Schulden van de schatkist

Als wij geld willen lenen, gaan we naar de bank. Maar als de bank geld wil lenen, waar moet zij dan naartoe? In dit artikel nemen we een kijkje in de wereld van de gigantische transacties.



En verder

- 4 In het nieuws
- 10 Graven naar goedkope kaartjes
- 16 Ronniy's Receptenhoekje
- 18 Ben je deelbaar?
- 22 Van bakker tot wiskundige
- 24 Uit het onderzoek

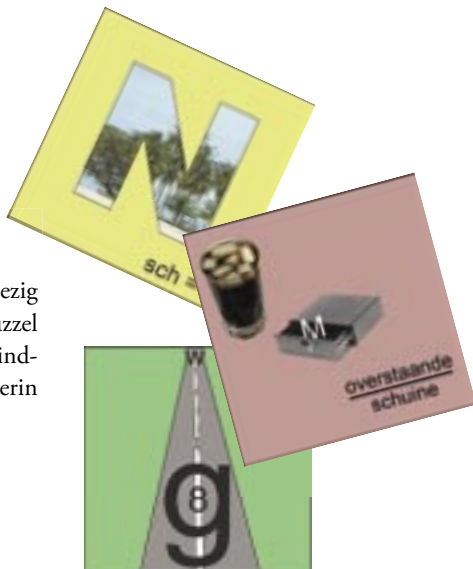
27 Onder water ademen

Je kent ze, je hebt ze misschien wel eens gebruikt om een geweldig mooi koraalrif te zien, maar weet vast nog niet hoe ze werken: duikflessen!



29 Breinwerk

Professor Peinzer is druk bezig geweest een cryptische puzzel in elkaar te zetten. Het eindresultaat is te vinden achterin de Perio. Veel succes!



14 Möbiusbanden en Kleinflessen

Ga zelf aan de slag met papier en plakband en bekijk de eigenschappen van Kleinflessen en Möbiusbanden, een paar interessante wiskundige figuren.

Van de redactie

Het is weer volop winter. Niet alleen buiten, waar de eerste sneeuw van het jaar alweer heeft gelegen en de nachtvorst er alweer voor gezorgd heeft dat de ijsbanen weer open kunnen, ook in de KNOB. Terwijl het op de gangen van de universiteit nog een aangename 20°C is, reviewen en layouten wij met sjaals, drie truien en twee paar sokken (per persoon!) de Periodiek. De enige reden waarom we nog geen handschoenen aanhebben, is omdat je dan niet kan typen. De thermometer ontbreekt, maar deze zou waarschijnlijk zo'n 10°C aangeven. Even doorbijten dus. Gelukkig blijft de sfeer onder andere door de Kerst-radiozender niet zo koeltjes.

Deze Perio heeft de redactie ook heel wat schrijfuurtjes gekost: de laatste maanden van het jaar zijn voor iedereen druk. Vandaar dat we dit keer wat minder externe scribenten hebben gevonden, wat betekende dat wij wat meer in de pen moesten klimmen. Nou ja, pen... Tegenwoordig gewoon een toetsenbord natuurlijk.

Al met al ligt hier toch de nieuwste Perio weer voor je. Misschien om te lezen als je lekker warm bij een haardvuurtje zit?

Veel leesplezier en een gelukkig nieuwjaar!

— Marion

Colofon

Redactie Marion Dam, Ronniy Joseph, Susan Klooster, Herbert Kruitbosch, Bart Visser.

Scribenten José Coppens, Sybren Harmsma, Paul H.M. van Loosdrecht, Marian Otter.

Met dank aan Ellen Schallig, Marten Veldthuis, Erik Weitenberg.

Adverteerders Thales Nederland B.V. (p. 13), Schut (p. 32).

Ook adverteren? Neem contact op met bestuur@fmf.nl.

Oplage 1200 stuks

Druk Scholma

ISSN 1875-4546

De Periodiek is een uitgave van de Fysisch-Mathematische Faculteitsvereniging en verschijnt vijf keer per jaar. Eerder uitgebrachte Periodieken zijn na te lezen op perio.fmf.nl. De redactie is te bereiken via perio@fmf.nl.

In het nieuws

Iron Man-pak

Als je niet sterk bent dan moet je slim zijn, dachten de mensen van *Raytheon Company* toen ze een Iron Man-pak maakten. Het pak is een kunstmatig exoskelet, dus een skelet buiten je lichaam, dat met sensoren en actuatoren de



bewegingen van je ledematen versterkt. Zo'n pak is ook nog eens zeer goed bestuurbaar. Daarom is hij handig voor soldaten die logistiek werk doen. Zij moeten ruim 7000 kg per dag verplaatsen. Je kan met het pak ook je vervelende broertje flink in elkaar slaan, maar omdat er nog problemen zijn met de veiligheid en capaciteit van de accu mag je dan wel hopen dat je uiteindelijk niet zelf ook klappen krijgt.

cnn.com

Armpje drukken met muizen

Als je dan niet sterk bent en niet slim bent, dan kun je nog gebruik maken van slimme biologen. In Chicago hebben onderzoekers namelijk muizen met zwakke spieren binnen



een paar dagen sterke spieren laten ontwikkelen. Dit deden ze door stamcellen in de spieren te spuiten. Uiteindelijk bleven deze spieren ook sterk. De onderzoekers dachten dat de spierrmassa snel na het ontstaan weer zouden afbouwen, maar ze bleven gezond tot de muizen na 2 jaar dood gingen. Men hoopt dat de stamcellen ook bij mensen in te kunnen zetten om hiermee spierziekten te verhelpen.

newsdaily.com

Touch-ijs

Vind je touchscreens ook zo cool? Tegenwoordig zijn ze dat letterlijk. Een team van Nokia heeft in Finland een scherm gemaakt van ijs. Een 50 cm dikke ijsmuur wordt van achter beschenen met infrarood licht en infraroodcamera's achter de muur houden de voorkant in de gaten. Een hand op het ijs reflecteert namelijk het infrarood licht. De camera's bepalen met behulp van een computer de plek, grootte en beweging van de hand. De computer laat nu een projector op het aangeraakte ijs schijnen op de aangeraakte plek, en die projecteert bijvoorbeeld vlammen.

newscientist.com



Shockende resultaten

Ooit afgevraagd hoe je je tentamenresultaten kan opkrikken? In Periodiek 2009-2 zijn enkele simpele huis- tuin- en keukenmiddelen uitgetest om te zien welke de concentratie opkrikken. Onderzoekers aan de Oxford University hebben hun eigen onderzoek gehouden met elektrodes en stroom. Uit het onderzoek bleek dat een lichte stroom door de juiste gebieden het leerproces kan stimuleren. Het is nog niet aan te raden om dit de dag voor je tentamen te doen, want het is nog niet bekend of er eventuele schadelijke gevolgen zijn!

kennislink.nl

Je echte leeftijd

Een dame vraag je niet naar haar leeftijd. Tegenwoordig vraag je haar gewoon naar een DNA-monster. Onderzoekers aan het Erasmus Universitair Medisch Centrum hebben een manier gevonden om uit enkele druppels bloed de leeftijd van een dader of slachtoffer te bepalen. In het DNA zit informatie verstopt voor het maken van afweercellen. In de loop der jaren worden delen van deze informatie vernietigd. Aan de hand van de hoeveelheid verdwenen fragmenten kan de leeftijd worden bepaald. Hier zit wel een foutmarge in van twintig jaar, maar dit is een verbetering van voorgaande manieren, die meer en vooral vers DNA vereisen.

newscientist.com

Leuke nieuwtjes uit de wondere wereld der wetenschap

E-reader? Gooi maar weg!

Nu zijn eigenaren nog zo trots op hun elektronische boekenkast, maar er komt een tijd dat ze gewoon worden weggegooid. Een vinding van Andrew Steckl, professor in Electrical Engineering, biedt mogelijkheden voor een e-reader die oprolbaar is en voelt als papier, maar toch gehele boeken of filmpjes bevat. De techniek, die *electrowetting* heet, voegt een elektrisch veld toe aan gekleurde druppels in een display, zodat tekst en foto's getoond kunnen worden. De professor ontdekte dat niet alleen glas, maar ook papier een geschikt materiaal hiervoor kan zijn. De methode belooft een goedkope en milieuvriendelijke oplossing te worden.

sciencedaily.com

Microchip tegen verlamdheid

Er is een nieuwe spier-stimulerende microchip gevonden die het voor mensen met een dwarslaesie mogelijk maakt hun verlamde spieren te trainen. De chip is klein genoeg om in het ruggenmerg aangebracht te worden en het revolutionaire is dat er meer spiergroepen gestimuleerd kunnen worden dan door elke eerder gevonden chip. Dit is mogelijk omdat er meerdere chips in het ruggenmerg aangebracht kunnen worden. Er worden zelfs zoveel meer spiergroepen gestimuleerd dat de gebruikers genoeg kunnen bewegen voor gecontroleerde

oefeningen zoals fietsen of roeien. Deze microchip kan ook gebruikt worden om een aantal ongemakken, zoals incontinentie en spasmes, te voorkomen.

sciencedaily.com

Print je eigen Aston

Altijd al een dure auto willen hebben, maar heb je deze droom tot nu toe niet kunnen verwezenlijken? Gelukkig is er nog de illegale optie. Dan wordt nu niet het fysiek stelen van een Aston Martin bedoeld, maar alleen het stelen van een ontwerp. Met een 3D-printer is namelijk onlangs een echt prototype van een hybride auto gemaakt. Zelfs de glazen ramen zijn door de printer geprint. Zo'n printer is ideaal voor het maken van ontwerpen, omdat veranderingen in het design gemakkelijk opnieuw geprint kunnen worden. De nieuwste auto's komen tegenwoordig dus niet van de dealer, maar van de printer.

wired.co.uk

Dik zijn is je moeders schuld

De voeding van een zwangere vrouw blijkt de functie van bepaalde genen kan beïnvloeden, waardoor het kind later overgewicht kan krijgen. Vrouwen die veel vet eten, beïnvloeden daarmee het 24-uurs ritme van de baby waardoor deze een ander hongergevoel en voedingspatroon,



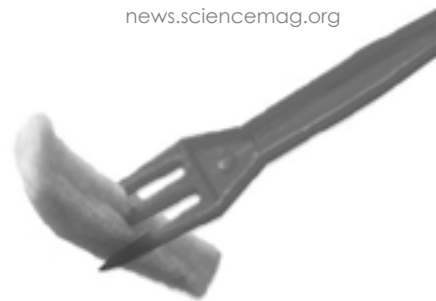
met meer kans op overgewicht, krijgt. Men hoopt dat met behulp van deze vindingen obesitas bij de volgende generatie teruggedrongen kan worden.

sciencedaily.com

Een portie anti-friet graag

Je hoeft in het dagelijkse leven nog niet bang te zijn dat je portie friet geannihileerd wordt door een portie anti-friet, al komt die tijd wellicht wel dichterbij. Onderzoekers van CERN zijn er namelijk onlangs in geslaagd om anti-waterstof te creëren en vast te houden. Het vasthouden was voorheen een probleem, maar met een nieuwe magnetische val is het ze gelukt om de neutrale anti-waterstofatomen te vangen. Dit is een stap dichterbij het creëren van grotere hoeveelheden anti-materie.

news.sciencemag.org



Kosmische stralen in Argentinië

DOOR JOSÉ COPPENS EN SYBREN HARMSMA

Kosmische stralen zijn deeltjes die door het heelal vliegen. Het kunnen protonen zijn, of zwaardere deeltjes zoals atoomkernen. Sommige kosmische stralen hebben een enorm hoge energie, soms wel een miljoen keer meer dan de deeltjes die wij zelf versnellen in de Large Hadron Collider. Door te meten aan kosmische stralen op aarde proberen astrodeeltjesfysici te ontrafelen hoe de kosmos deeltjes kan versnellen tot zulke extreem hoge energieën.

Bij het Pierre Auger Observatorium, dat in het westen van Argentinië staat, worden kosmische stralen waargenomen. Bij een botsing van zo'n hoog-energetisch kosmisch deeltje op de atmosfeer van de aarde ontstaat een hele lawine aan secundaire deeltjes. Deze lawine bereikt uiteindelijk het aardoppervlak en wordt daar gedetecteerd. Zo'n lawine heet in het Engels een *extensive air shower* (zie figuur 2) en werd in 1938 voor het eerst gemeten door de Franse natuurkundige Pierre Auger.

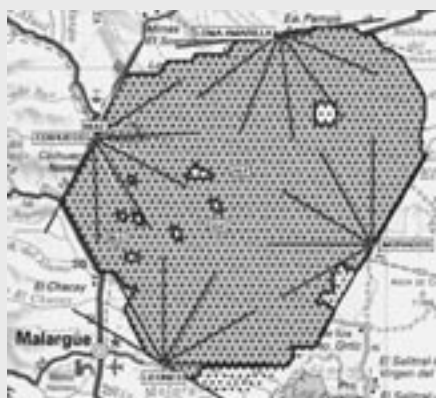
Omdat kosmische stralen met een extreem hoge energie relatief zeldzaam zijn, is een groot detectieoppervlak noodzakelijk. Daarom beslaat het Pierre Auger Observatorium (figuur 1) zo'n 3000 km², dat is ongeveer de oppervlakte van Zuid-Holland. Het observatorium is een hybride detector, wat betekent dat er

op twee verschillende manieren informatie verkregen wordt over de deeltjeslawine. Hierdoor kunnen de energie en de aankomstrichting van de extreem-energetische kosmische deeltjes worden bepaald.

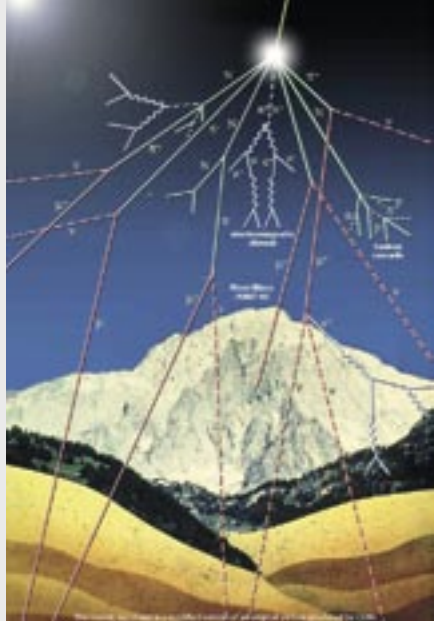
Het eerste onderdeel van het observatorium is de oppervlakedetector. Dit is een rooster van 1600 watertanks die 1,5 km uit elkaar staan. Sommige deeltjes in de lawine gaan door een watertank heen wanneer zij het aardoppervlak bereiken, en daar komt een lichtflitsje bij vrij. Dit licht heet Cherenkovlicht en wordt door de oppervlakedetector geregistreerd. Daarnaast zijn er vier fluorescentieteleascopen die het gebied met de 1600 watertanks omringen. Deze telescopen meten het fluorescentielicht dat door stikstofatomen in de atmosfeer wordt uitgezonden, nadat zij door de deeltjes in de lawine zijn aangeslagen. Het fluorescentie-licht dat wordt gemeten is zo zwak dat het alleen op maanloze, heldere nachten gedetecteerd kan worden. Dit is maar zo'n 10% van de tijd en dat betekent dat detectie van kosmische deeltjes slechts in 10% van de tijd werkelijk op een hybride manier gebeurt.

Radiodetectie

Onderzoekers verbonden aan drie Nederlandse instituten (Nikhef, KVI RUG en IMAPP Radboud Universiteit Nijmegen) maken deel uit van het Pierre Auger samenwerkingsverband. De Nederlandse bijdrage aan het observatorium richt zich voornamelijk op de ontwikkeling van een derde manier om kosmische stralen te meten, namelijk met behulp van radioantennes. In de lawine die gecreëerd wordt door kosmische stralen, bevinden zich veel elektrisch geladen secundaire deeltjes (voornamelijk elektronen en positronen). Deze geladen deeltjes bewegen met een hoge snelheid door



FIGUUR 1 Overzicht van het Observatorium. De 1600 water-Cherenkovdetectoren worden aangegeven met punten. De vier fluorescentiedetectoren kijken uit over het veld met de watertanks.



FIGUUR 2 Een schematische weergave van een *extensive air shower*.

het aardmagnetisch veld en worden daardoor afgebogen. Hierbij wordt elektromagnetische straling uitgezonden die waarneembaar is in het radiogebed tussen de 10 en 100 MHz. Hoewel het al zo'n vijftig jaar bekend is dat deze straling met simpele radioantennes gemeten kan worden, is de techniek pas sinds kort zover dat dit ook op grote schaal en met voldoende gevoeligheid mogelijk is.

Het voordeel van radiodetectie is dat er in principe continu gemeten kan worden. Dit in tegenstelling tot fluorescentiedetectie, de andere manier om de elektromagnetische component van de deeltjeslawine te meten. Deze laatste techniek kan zoals gezegd maar zo'n 10% van de tijd gebruikt worden. Juist het meten aan deze elektromagnetische component van de lawine is interessant, omdat het zo'n 90% van de energie van het oorspronkelijke kosmische deeltje bevat. Dit is dus een goede maat voor de energie van het primaire deeltje.

Daarnaast kan met data afkomstig van een aantal radiodetectoren erg nauwkeurig de richting van de kosmische stralen worden bepaald. Op die manier kunnen we meer te weten komen over de oorsprong van de deeltjes. Een derde voordeel is dat de radiopuls die door de deeltjes in de lawine wordt uitgezonden, informatie bevat over de ontwikkeling van de lawine in de atmosfeer. Dit laatste kan antwoord geven op de vraag wat voor deeltje het primaire deeltje was. Was

het primaire deeltje een proton, of een atoomkern van bijvoorbeeld ijzer? Hoewel het niet mogelijk is om voor iedere kosmische straal afzonderlijk de primaire compositie te bepalen, kunnen we na een bepaalde tijd meten wel iets zeggen over de gemiddelde massa van de kosmische stralen die in die periode gemeten zijn. En ook of deze gemiddelde massa verandert als functie van de gemeten energie.

De bovenstaande voordelen laten zien dat radiodetectie een interessante complementaire techniek is voor het meten van de eigenschappen van deeltjeslawines. Genoeg reden dus om te investeren in deze derde, onafhankelijke methode voor het observeren van kosmische stralen!

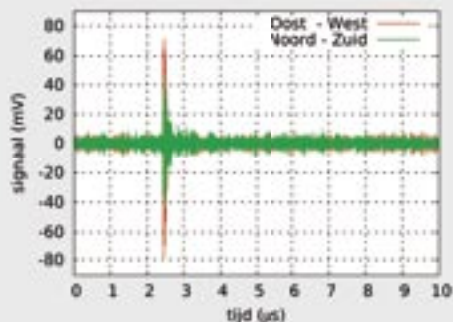
De opstelling

De eerste 'Nederlandse' opstelling van radioantennes bij het Pierre Auger Observatorium bestond uit drie antennes. Er werden twee soorten antennes gebruikt: een LPDA (log-periodieke dipool antenne), die ontwikkeld is door medewerkers uit Aken en Karlsruhe en een LOFAR-antenne uit Nederland; zie figuur 3. Beide soorten antennes meten het elektrisch veld in twee polarisatierichtingen: noord-zuid en oost-west.

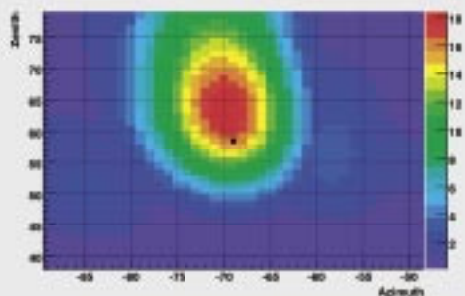
Het data-acquisitiesysteem bevond zich in een container op de Argentijnse pampa. Hier zijn een aantal basisvoorzieningen, zoals elektriciteit en internet, aan-



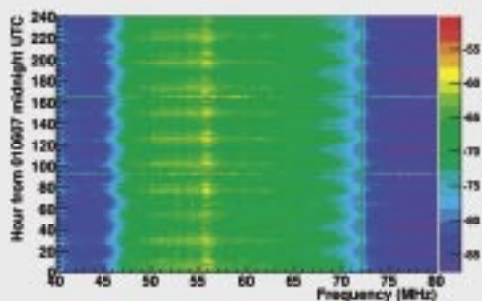
FIGUUR 3 Links: een LPDA-antenne. Rechts: een LOFAR-antenne.



FIGUUR 4 Een radiopuls gemeten in noord-zuid (groen) en oost-west (rood) polarisaties van een LPDA-antenne.



FIGUUR 5 Een stukje van de hemel. Azimut en zenit zijn de horizontale en verticale hoek (in graden). Het zwarte puntje is de plek waar de kosmische straal vandaan kwam, bepaald door watertanks. De kleuren zijn de signaalsterkte bepaald door antennes: rood geeft aan wanneer het product van de gemeten amplitudes van de radiosignalen van de drie antennes maximaal is.



FIGUUR 6 Het dynamische spectrum van de achtergrondstraling gedurende 10 dagen. De kleur geeft de signaalsterkte aan (het vermogen in dBm/250 kHz).

wezig. De door de antennes gemeten signalen werden via een kabel in de container gebracht. Hier werden ze versterkt en gefilterd, waarbij alleen de frequenties tussen 30 en 70 MHz werden doorgelaten. Het filteren werd gedaan om veel vervelende achtergrondruis kwijt te raken, zoals dat van FM-radiostations. Vervolgens werd het signaal naar een *digitizer* gestuurd. Een digitizer kan van een analoge signaal een digitaal signaal maken.

Met behulp van een computerprogramma kunnen bepaalde instellingen van de digitizer worden aangepast, zoals wanneer er signalen gemeten en opgeslagen moeten worden. Dit laatste noemen we de *trigger*. We konden bijvoorbeeld eisen dat alleen signalen worden opgeslagen die tegelijkertijd in beide polarisatierichtingen werden gemeten. De signalen die voldoen aan de ingestelde trigger-eisen werden in de digitizer verwerkt tot een datapakketje met een lengte van tien microseconden dat vierduizend samples bevat. Het pakketje kreeg daarbij een tijdstempel van een GPS-antenne en werd vervolgens opgeslagen op een pc.

Een groot probleem was dat er, ondanks het filteren, nog steeds veel ruis binnenkwam. Om onderscheid te kunnen maken tussen signalen veroorzaakt door kosmische stralen en achtergrondruis hebben we twee scintillatoren gebruikt om de uitlezing van de radio-antennes te triggeren. Deze scintillatoren zijn deeltjes-detectors en geven aan wanneer er een lawine van deeltjes plaatsvindt. Door op die momenten de antennes te laten meten krijgen we de radiosignalen van de kosmische stralen binnen. Een voorbeeld van een gemeten puls is te zien in figuur 4.

Data-analyse

Door te testen bij het Pierre Auger Observatorium kunnen we zoeken naar correlaties tussen onze gemeten radiosignalen van deeltjeslawines en lawines die zijn geregistreerd met de deeltjesdetectors van Auger. Lawines die gemeten worden met beide meetsystemen noemen we *coïncidenties*. Van deze coïncidenties weten we, dankzij de reconstructie van de data van de watertanks, de energie en de richting van de oorspron-

kelijke kosmische straal.

We kunnen deze richting reconstrueren met behulp van de data van de radioantennes. Als wij in ieder van de drie antennes een puls meten, dan wordt er, doordat de lawine een bepaalde richting heeft, een klein tijdsverschil tussen die pulsen waargenomen. Deze tijdsverschillen gebruiken we om de richting van de kosmische stralen te bepalen. Een voorbeeld hiervan is te zien in figuur 5. Het is een veelbelovend resultaat dat we met slechts drie antennes, op een onderlinge afstand van slechts 100 meter, al een nauwkeurigheid halen van vijf graden.

Naast de radiopulsen van de kosmische stralen wordt ook de zogenaamde 'radioachtergrondstraling' bestudeerd. Een deel van de achtergrond wordt gecreëerd in ons eigen melkwegstelsel. Dicht bij het centrum van ons melkwegstelsel staan een paar sterke radiobronnen, die we kunnen herkennen aan de variatie van de achtergrondstraling met de tijd. De achtergrond van radiostraling laten we zien in een dynamisch spectrum (figuur 6). Hierin is de gemeten signaalsterkte uitgezet tegen frequentie (op de x-as) en tijd (op de y-as). De variatie van de sterkte van de achtergrond over 10 dagen is duidelijk zichtbaar; er is een periodieke structuur te herkennen. De periode van deze variatie blijkt net iets minder te zijn dan 24 uur, namelijk 23 uur en 56 minuten. Dit komt overeen met de lengte van een siderische dag, wat de tijd is die de aarde nodig heeft om ten opzichte van de sterrenhemel een keer om zijn as te draaien. Bovendien is de signaalsterkte maximaal wanneer het centrum van de Melkweg recht boven de radioantennes staat. De galactische radiobronnen leveren dus een belangrijke bijdrage aan de achtergrondstraling van onze metingen.

Deze radiostraling van ons melkwegstelsel, waarvan de absolute sterkte uit andere metingen bekend is, kan worden gebruikt om de gevoeligheid van onze radiodetectoren te kalibreren. Bovendien weten we nu dat we de van de aarde (of mens) afkomstige achtergrondruis effectief onderdrukken, want deze ruis is niet sterker dan de straling van de galactische radiobronnen.

MAXIMA en AERA

De radiopulsen van de kosmische stralen die we hebben gemeten, worden nog grondig geanalyseerd. We willen weten wat het verband is tussen de vorm van de pulsen en de energie van het primaire deeltje en hoe de signaalsterkte wordt beïnvloed door de richting waaruit het deeltje komt, de hoek tussen deze richting en de richting van het aardmagnetisch veld, enzovoort.

Naast het analyseren van de data zijn we ook bezig geweest met het bouwen van een tweede radio-opstelling in Argentinië: MAXIMA (Multi-Antenne eXperiment In Malargüe Argentinië). Deze opstelling heeft een aantal verbeteringen ten opzichte van de eerste: de antennes en het data-acquisitiesysteem worden gevoed door accu's. Deze worden opgeladen met zonnepanelen. We hebben nu niet meer alle elektronica op een centrale locatie, maar een netwerk van autonome stations. De stations communiceren met een centrale computer, die onder andere zorgt voor de data-opslag. We zijn bezig met het testen van een slim algoritme dat bepaalt of een gemeten radiopuls afkomstig is van een kosmische straal (en dus bewaard moet worden), of dat het gaat om achtergrondruis (en weggegooid kan worden). Dan hebben we de scintillatoren niet langer nodig om een trigger te maken, maar kunnen we meten met een 'auto-trigger'. In dat geval hebben we zelfstandige, onafhankelijke radiodetectoren.

Omdat de eerste radio-opstelling zulke goede resultaten heeft behaald, zijn we inmiddels begonnen met de bouw van een grotere radiodetector genaamd AERA. Dit doen we samen met collega's uit Frankrijk en Duitsland. AERA wordt een netwerk van zo'n 160 antennes dat een oppervlakte van ongeveer 20 km² zal beslaan. AERA is dus veel groter dan de opstellingen die we tot nu toe gebruikten. We verwachten dan ook hiermee veel meer radiosignalen van kosmische stralen te kunnen meten en dus nog meer te leren over kosmische stralen en de radiostraling van de deeltjeslawines. Als de resultaten van AERA goed zijn dan kunnen we gaan denken aan de volgende fase, naar uiteindelijk meer dan 3000 km²! •

Graven naar goedkope kaartjes

DOOR HERBERT KRUITBOSCH

Of je nu in Leeuwarden of Groningen woont, door de trein te nemen kun je altijd terugkeren van een bezoek aan je ouders. Als je ouders bijvoorbeeld in de Randstad wonen, dan moet je op de terugweg nog wel opletten dat je in het goede treinstel zit. In Zwolle wordt namelijk de trein gesplitst zodat een treinstel naar Leeuwarden gaat en twee naar Groningen gaan. Je begrijpt natuurlijk wel dat dat met de reizigersbezetting van de trein te maken heeft. Maar hoe wordt nou eigenlijk bepaald hoeveel treinstellen er voor een bepaalde richting worden ingezet?

In het artikel “Graven naar tijden” in Periodiek 2010-3 zag je hoe je de aankomst- en vertrektijden van treinen kunt bepalen. Wanneer je eenmaal die tijden hebt, dan kun je gaan bepalen hoeveel wagons je op verschillende plaatsen moet inzetten. In eerste instantie wil je niet meer wagons dan nodig zijn inzetten, zolang er voldoende capaciteit is voor alle reizigers. Daarbij mag een trein op een traject ook maar een beperkt aantal wagons lang zijn: perrons zijn bijvoorbeeld niet oneindig lang en trajecten kunnen scherpe bochten hebben.

Daarnaast moet het aantal treinstellen op een station aan het begin van een dag hetzelfde zijn als aan het begin van de opvolgende dag. Op die manier kan de dienstregeling steeds opnieuw beginnen. Een goede verdeling van de wagons kun je bereiken door op de juiste stations extra wagons aan de trein te koppelen of wagons achter te laten.

Net als bij het bepalen van de dienstregeling wordt voor het oplossen van dit probleem ook een graaf gebruikt. Het probleem is echter wel iets anders en daarom ziet de graaf er ook anders uit. Als een dienstregeling bepaald moet worden, kan je gebruiken dat ieder uur dezelfde treinen rijden en dus kan je dan met de tijden modulo 60 rekenen. Omdat tijdens spitsuren meer capaciteit nodig is dan op reguliere tijden, is het onwenselijk om nu ieder uur hetzelfde te behandelen. Als 's ochtends meer reizigers naar het zuiden gaan dan andersom, wil je in die richting meer wagons inzetten. Andersom zullen veel van die reizigers aan het einde van de dag terugreizen. Dan moet je weer meer wa-

gons inzetten van het zuiden naar het noorden. Ook hadden we bij het bepalen van een dienstregeling te maken met tijden op de knopen van de graaf en intervallen op de pijlen. Hier hebben we alleen te maken met een minimum en een maximum aan wagons.

Laten we nu eens gaan kijken wat we dan wel in zo'n graaf stoppen. Een graaf bestaat uit knopen en soms zit tussen twee knopen een pijl. Waarvoor heeft zo'n graaf nu knopen en pijlen? Het lijkt een logische keuze om voor ieder station een knoop en voor ieder stuk spoor tussen twee stations een pijl in de graaf te stoppen. Maar dan kunnen we niet de variatie in capaciteit gedurende de dag implementeren. We moeten dus ook voor ieder spoor alle treinen die er overheen gaan en wanneer ze dat doen in de graaf stoppen. Dat kan door de aankomst- en vertrektijden in de graaf te verwerken. Gelukkig hebben we die al eens berekend.

Graafmachine

Een traject bestaat uit een eindige rij stations met daartussen etappes die een trein aflegt. Op een dag rijden meerdere treinen over een traject, met op ieder tussenliggend station een aankomst- en vertrektijd. Op het begin- en eindstation heeft de trein alleen een vertrek- en aankomsttijd. Zo'n traject kan bijvoorbeeld bijvoorbeeld langs de stations Amsterdam, Rotterdam, Roosendaal en Vlissingen gaan. Het is van belang dat we alleen de stations in de graaf opnemen waar de trein wagons kan af- of aankoppelen. Dit kan niet op kleinere stations zoals station Haren, deze moeten we daarom negeren.

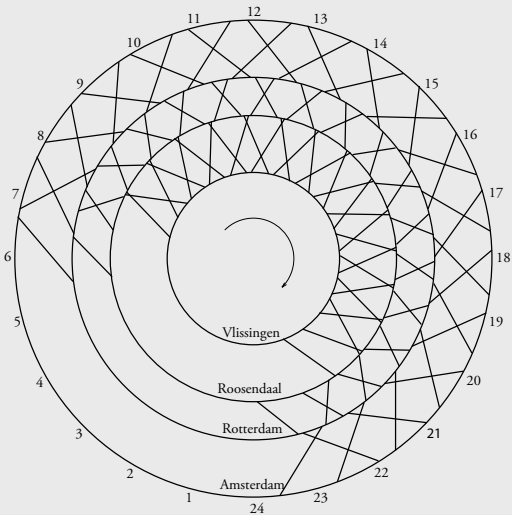
Uiteindelijk moeten alle treinen voor alle trajecten in een graaf komen. Een tabel met alle tijden voor het traject Amsterdam-Vlissingen zie je in figuur 2. Je doet dit door van iedere aankomst- en vertrektijd op een station een knoop te maken. Maak nu van alle aankomsten en vertrekken een knoop. Zo'n knoop stelt dan een station en een tijd voor. Als een trein dus vanaf station x_1 om t_1 vertrekt en op het volgende station x_2 om t_2 aankomt, dan heeft de graaf een pijl van (x_1, t_1) naar (x_2, t_2) .

Iedere keer dat een trein vertrekt of aankomt op een station, verandert het aantal wagons op dat station. Als op een station x een trein om t_1 aankomt en daarna op datzelfde station een andere trein om t_2 aankomt of vertrekt, dan heeft de graaf ook een pijl van (x, t_1) naar (x, t_2) . Aan iedere pijl kun je een getal toewijzen, dat is het aantal wagons dat tussen de stations verplaatst wordt. Als beide kanten van de pijl op het zelfde station liggen, dan is dit dus het aantal wagons dat op een station blijft staan.

Na de laatste trein die op een station aankomt of vertrekt, moeten er evenveel wagons zijn als het moment dat de dienstregeling start. Daarom heeft de graaf ook voor ieder station een pijl van de laatste naar de eerste trein die vertrekt of aankomt. Dit zijn de nachtelijke pijlen.

Een graaf voor het traject Amsterdam, Rotterdam, Roosendaal en Vlissingen zie je in figuur 1. Op iedere knoop moet het aantal binnenkomende wagons gelijk zijn aan het aantal uitgaande wagons. Een graaf, waarvoor dit *behoud van flow* geldt, heet een flownetwerk. Als we straks gaan rekenen zullen we er steeds voor zorgen dat deze eigenschap behouden blijft. Wagons hoeven dan niet per se aan te komen of te vertrekken op zo'n punt. Ze kunnen immers ook op een station blijven staan om later, bij een volgende knoop, gebruikt te worden.

Het totale aantal wagons dat op een bepaald moment in het netwerk zit, is gelijk aan het aantal wagons dat 's nachts op de stations wacht om met de dienstregeling van de volgende dag te beginnen. In figuur 1 zijn



FIGUUR 1 Graafmodel voor het berekenen van de wagonomloop van een traject. Iedere cirkel bevat knopen voor een station. Op zo'n cirkel ga je dan met de klok mee de 24 uur van een dag langs.

Treinstel		2123	2127	...	2151	2155
Amsterdam	V		6.48	...	12.56	13.56
Rotterdam	A		7.55	...	13.58	14.58
Rotterdam	V	7.00	8.01	...	14.02	15.02
Roosendaal	A	7.40	8.41	...	14.41	15.41
Roosendaal	V	7.43	8.43	...	14.43	15.43
Vlissingen	A	8.38	9.38	...	15.38	16.38
Treinstel		2159	2163	...	2187	2191
Amsterdam	V	14.56	15.56	...	21.56	22.56
Rotterdam	A	15.58	16.58	...	22.58	23.58
Rotterdam	V	16.00	17.01	...	23.02	
Roosendaal	A	16.43	17.43	...	23.54	
Roosendaal	V	16.45	17.45	...		
Vlissingen	A	17.40	18.40	...		

Treinstel		2108	2112	...	2136	2140
Vlissingen	V			...	10.56	11.56
Roosendaal	A			...	11.50	12.50
Roosendaal	V		5.29	...	11.53	12.53
Rotterdam	A		6.28	...	12.32	13.32
Rotterdam	V	5.31	6.29	...	12.34	13.35
Amsterdam	A	6.39	7.38	...	13.38	14.38
Treinstel		2144	2148	...	2172	2176
Vlissingen	V	12.56	13.56	...	19.55	
Roosendaal	A	13.50	14.50	...	20.49	
Roosendaal	V	13.53	14.53	...	20.52	21.53
Rotterdam	A	14.32	15.32	...	21.30	22.32
Rotterdam	V	14.35	15.34	...	21.32	22.34
Amsterdam	A	15.38	16.40	...	22.38	23.38

FIGUUR 2 Aankomst- en vertrektijden voor het traject Amsterdam-Vlissingen, een aantal kolommen zijn weggelaten.

dat dus de lange stukken op de cirkels zonder pijlen tussen deze cirkels. Eerder noemde ik deze pijlen de nachtelijke pijlen, het totaal aantal wagons door al deze pijlen noemen we de *nachtelijke som*.

Voor flownetwerken bestaan allerlei algoritmen om het rekenwerk voor je te doen. Voor ons geval bestaan *minimal cost flow* algoritmen, die de kosten (het aantal benodigde wagons) zo klein mogelijk maken.

Dit algoritme gaat ervan uit dat voor iedere pijl al een flow is bedacht, zodanig dat voor iedere pijl de flow mooi tussen zijn minimum- en maximumwaarde ligt en voor iedere knoop ook nog het behoud van flow geldt. Als in eerste instantie de flow voor alle pijlen 0 is, zal aan (bijna) geen van de minima en maxima worden voldaan. Stel je vindt een *cykel*, een pad dat bij dezelfde knoop begint en eindigt, die deze condities schendt. Omdat het een cykel is, mag je alle pijlen op het pad verhogen of verlagen met dezelfde waarde zonder dat het behoud van flow geschonden wordt. Immers geldt voor iedere knoop dat een pijl die er binnenkomt evenveel wordt verhoogd of verlaagd als een pijl die er weer uit gaat. Als je deze waarde zo kiest dat zoveel mogelijk minima worden opgelost zonder een maximum te schenden, heb je het probleem deels opgelost. Als je net zolang zulke cycli vindt en aanpast schend je vanzelf geen van de minima of maxima meer, tenminste, als dat überhaupt mogelijk is.

De flows die je nu hebt, kunnen wel werken, maar misschien is het allemaal nog veel te duur. Om te voorkomen dat je treinkaartje heel duur wordt gaan we nu kijken hoe we de kosten kunnen minimaliseren. Feitelijk moeten we daarvoor de nachtelijke som minimaliseren. Dit gaat eigenlijk op dezelfde manier als het bepalen van een werkende wagonomloop, zoals in de vorige alinea. We stellen nu dat voor alle pijlen de kosten 0 zijn, behalve voor de nachtelijke pijlen. Die kosten exact de flow, de hoeveel wagons die over zo'n pijl gaan. We vinden nu weer een cykel, maar nu geldt dat die cykel te duur is. Dus maken we hem zoveel mogelijk goedkoper zonder het behoud van flow te schenden. Een cykel is te duur als alle flows op zo'n cykel meer wagons nodig hebben dan hun minimum

én als de cykel over een nachtelijke pijl gaat. Dan kun je alle wagons in de cykel verlagen en daarmee ook de nachtelijke som verlagen. Als je alle te dure cycli goedkoper maakt kom je op het goedkoopste treinkaartje uit.

Opgelost?

Nu lijkt alles mooi opgelost te zijn, maar dat is helaas nog niet zo. Een treinstel bestaat uit meerdere wagons. Je kunt dat goed merken als de trein rijdt en je op twitter leest dat je vriendin in dezelfde trein zit. Als ze in hetzelfde treinstel zit, kun je nog naast haar gaan zitten, ook al zit ze in een andere wagon. Wanneer ze echter in een ander treinstel zit dan lukt dat niet. In sommige treinstellen heb je drie wagons en in anderen weer vier. Dit worden drietjes en viertjes genoemd.

Die verschillende treinstellen maken het probleem lastiger dan het probleem dat we hebben opgelost. Een trein met 3 viertjes heeft immers evenveel wagons als twee treinen met elk 2 drietjes. Toch kun je die ene trein niet opsplitsen in de twee andere treinen. Je moet bij het oplossen van dit lastigere probleem dus rekening houden met treinstellen van verschillende soorten die over je netwerk *flowen*.

Ook kunnen de kosten van een wagon in een drietje anders zijn die die in een viertje. Daarnaast hebben ze verschillende eerste- en tweedeklas-delen. Dit geeft meer flexibiliteit voor het oplossen van het probleem, waardoor een betere oplossing gevonden kan worden, maar hierdoor wordt het vinden van die oplossing juist weer lastiger.

De oplossing die we hebben besproken kan een computer snel uitvoeren, maar als met alle samenstellingen van treinen rekening gehouden moet worden, dan gaat dat veel te traag. In [1] lees je hoe je alsnog binnen acceptabele tijd een oplossing kan vinden. •

Referenties

- [1] Schrijver, A., "*Minimum circulation of railway stock*", Centrum voor Wiskunde en Informatica.

Become part of a
learning adventure

THALES

THALES NEDERLAND

Toonaangevend in de sectoren Defence en Security. Met circa 2.000 gedreven medewerkers de toonaanbieder van hightechbanen. Onze primaire focus is het innoveren van onze producten en het ontwikkelen van de nieuwste technologieën. Spraakmakende voorbeelden van onze cutting edge technologieën zijn radar-, communicatie- en command & controlsystemen voor marineschepen en communicatie-, beveiligings- en betaalsystemen voor het bedrijfsleven. Thales Nederland (hoofdkantoor in Hengelo) is onderdeel van de internationale Thales Group.

OUR CAREER FEATURES

HIGHTECH

Je werkt aan unieke en zeer complexe producten.

MULTIDISCIPLINAIR

Je werkt als specialist in gevarieerde, multidisciplinaire teams.

INTERNATIONAAL

Je werkt voor opdrachtgevers over de hele wereld door systemen te ontwikkelen, te verkopen, te installeren, te testen en te onderhouden.

DYNAMISCH

Je werkt in de dynamiek van de multinational Thales. Onze vestigingen vind je overal ter wereld. Je internationale doorgroeikansen dus ook.

UITDAGEND

Je werkt aan je persoonlijke ontwikkeling in een omgeving die je constant uitdaagt.

EMBARK ON A THALES ADVENTURE IN THE NETHERLANDS

Heb je een afgeronde opleiding in Informatica, Elektrotechniek, Technische Natuurkunde, of vergelijkbaar dan kan jouw loopbaan zich in verschillende richtingen ontwikkelen. Bijvoorbeeld in een specialistische functie als Software Engineer, Radar Engineer, System Engineer of Software Architect. Ambieer je een Managementfunctie dan is je volgende carrièrestap Project Manager, Commercial Manager of Program Manager met mogelijk een doorgroei naar Executive Management.



By courtesy of Royal Schelde Group



Worldwide: with 68.000 employees, a presence in 50 countries, Thales is a global leader in aerospace, defence and security.

Apply straight away

Thales komt graag in contact met jou om samen jouw mogelijkheden te bekijken en je carrièrepad uit te stippelen. Ook bieden wij studenten met een technische achtergrond meer dan 100 uitdagende stage- en afstudeeropdrachten. Vraag onze gids aan of bezoek onze website. Je kunt daar ook solliciteren.

www.thalesgroup.com/netherlands

START YOUR THALES
ADVENTURE



Möbiusbanden en Kleinflessen

DOOR SUSAN KLOOSTER

In 1882 creëerde Felix Klein de Kleinfles. Dit is een abstract figuur die op een fles lijkt. De binnenkant van zo'n Kleinfles loopt op een bijzondere wijze over in zijn buitenkant, zonder dat de fles zichzelf snijdt. Daardoor bevat hij zichzelf. Je krijgt deze figuur door twee Möbiusbanden te verbinden.

Om te begrijpen wat hier gebeurt, kijken we eerst naar een enkele Möbiusband. Pak om te beginnen een krant, een schaar en wat lijm of plakband. Knip een strook rechthoekig papier uit en maak hiervan een Möbiusband: draai een van de korte kanten 180° en plak nu de twee korte kanten aan elkaar. Nu zullen sommigen al bekend zijn met de bijzondere eigenschappen van de zojuist gemaakte Möbiusband. Om eentje te ontdekken kun je bijvoorbeeld parallel langs de lange kant in het midden van de strook papier knippen. Wat je dan krijgt is waarschijnlijk niet wat je had verwacht: een gedraaide cilindrische strook die twee keer zo lang is als de Möbiusband. Een andere mogelijkheid is op een derde van de rechthoekige strook knippen totdat je het beginpunt weer bereikt hebt. Je krijgt nu twee stukken, de kleine is een Möbiusband en de grote is een gedraaide cilinder.

Pak nu een fictief rechthoekig stuk papier (figuur 1). We plakken de lange zijdes aan elkaar en hebben dan weer een cilindervorm. Vervolgens verbinden we de uiteinden van de cilinder met elkaar. We hebben nu een donut gekregen, in de wiskunde een torus genaamd. Voordat we dit wiskundig gaan benaderen, kijken we naar figuur 2. We beginnen nu met een pentagram. We verbinden weer de zijdes met gelijke pijltjes met elkaar. Nu krijgen we een torus met een gat. Bij alle bovenstaande voorbeelden zijn we begonnen met een deelverzameling van $\mathbb{R}^2$ en deze hebben we veranderd in een andere verzameling.

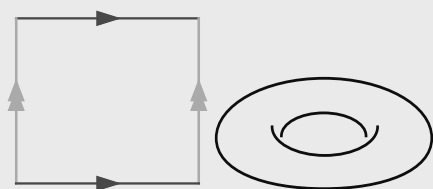
De formele aanpak

De meeste mensen vinden onderstaande figuren veel beter te begrijpen dan de formules. Om echter meer te kunnen zeggen over de figuren moeten we een formelere aanpak bekijken die als basis de Möbiusband heeft. Neem nu het vierkant uit $\mathbb{R}^2$ in plaats van papier: $X = [0, 1] \times [0, 1]$. Als je van dit vierkantje een Möbiusband maakt, zitten de zijden die je aan elkaar plakt op dezelfde plek. Sommige punten in het vierkant zijn op de Möbiusband dan dus eigenlijk *hetzelfde*. Daarvoor hebben we de equivalentierelatie $\sim$. Voor (s_1, t_1) en (s_2, t_2) op het vierkant X zeggen we dat $(s_1, t_1) \sim (s_2, t_2)$ dan en slechts dan als een van de volgende voorwaarden geldt:

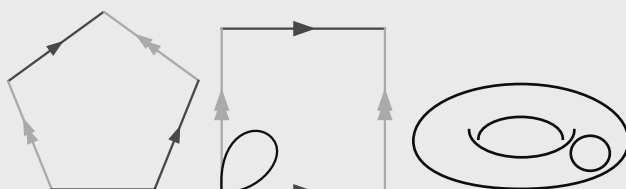
- (i) $s_1 = s_2$ en $t_1 = t_2$
- (ii) $s_1 = 0, s_2 = 1$ en $t_2 = 1 - t_1$
- (iii) $s_1 = 1, s_2 = 0$ en $t_2 = 1 - t_1$

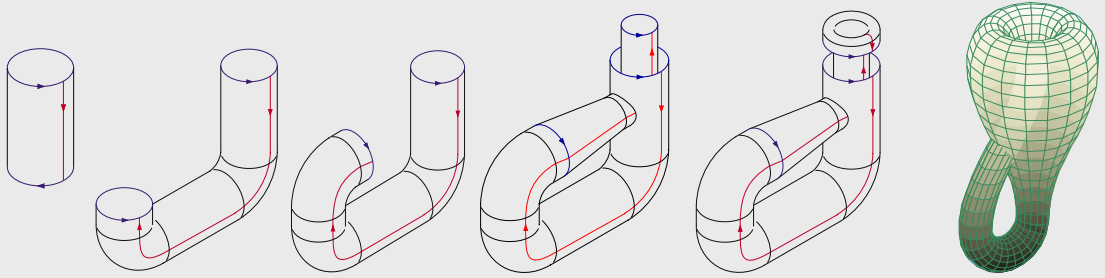
Je kunt vrij eenvoudig zien dat alle punten die aan $\sim$ voldoen hetzelfde zijn op de Möbiusband. Om aan te geven dat je de Möbiusband krijgt uit de relatie $\sim$, noemen we hem $X/\sim$. Met andere equivalentierelaties en andere papiertjes kunnen we ook andere figuren maken, zoals een torus. Dat gaan we nu doen. Pak weer het vierkant $X = [0, 1] \times [0, 1]$. Op de torus zijn punten (s_1, t_1) en (s_2, t_2) weer *hetzelfde* als één s aan de ene en één s aan de ander kant van X zit terwijl de *hoogte* van beide punten op zo'n kant gelijk is. Dat

FIGUUR 1 Van rechthoek naar donut.



FIGUUR 2 Een pentagram wordt een donut met een gat.





FIGUUR 3 Constructie van een Kleinflës

geldt ook voor t . Dus $(s_1, t_1) \sim (s_2, t_2)$ geldt dan en slechts dan als een van deze voorwaarden geldt:

- (i) $s_1 = s_2$ en $t_1 = t_2$
- (ii) $\{s_1, s_2\} = \{0, 1\}$ en $t_1 = t_2$
- (iii) $\{t_1, t_2\} = \{0, 1\}$ en $s_1 = s_2$
- (iv) $\{s_1, s_2\} = \{0, 1\}$ en $\{t_1, t_2\} = \{0, 1\}$

Cirkels, hartjes en torussen

We deden tot nu toe alsof je uit zo'n ruimte met een equivalentierelatie steeds een uniek figuur krijgt, maar dat is niet zo. Neem in plaats van een vierkantje een touwtje $X = [0, 2\pi]$ in $\mathbb{R}$ en knoop beide uiteinden aan elkaar, dus $0 \sim 2\pi$. Andere punten die verschillend zijn, zijn ook niet equivalent aan elkaar. Zo'n touwtje kun je in $\mathbb{R}^2$ in een cirkel maar ook in een hartje leggen.

Op welke manier zo'n touwtje dan ligt, kun je aangeven met een functie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, voor de cirkel is dit bijvoorbeeld $f(t) = (\cos t, \sin t)$. Deze functie, maar ook zijn inverse $f^{(-1)}(x, y) = \tan^{-1}(y/x)$ met uitzonderingen $f^{-1}(0, 1) = 0$ en $f^{-1}(0, -1) = \pi$, zijn beide continu. In zo'n geval noemen we de cirkel in $\mathbb{R}^2$ en het interval in $\mathbb{R}$ homeomorf. Zo zijn ook willekeurige ruimtes X en Y homeomorf of topologische equivalenten als er een bijectieve functie, die dus iedere X met exact een Y verbindt, $f: X \rightarrow Y$ is zodat f en f^{-1} beide continu zijn.

De torus uit figuur 2 kun je maken door een cirkel in het xz -vlak die een stuk van het nulpunt af ligt te roteren rond de z -as. Als de cirkel een centrum $(a, 0, 0)$ heeft en een straal r en we roteren met een hoek ϕ , dan wordt een punt op de torus weergegeven door:

$$((a + r \cos \theta) \cos \phi, (a + r \cos \theta) \sin \phi, r \sin \theta)$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi$$

Kleinflës

Een Kleinflës is een geometrisch oppervlak waar je geen onderscheid kan maken tussen de binnen- en buitenkant. Het oppervlak is vernoemd naar de wiskundige Felix Klein die deze flës voor het eerst beschreef in 1882. In 1995 heeft Alan Bennett een collectie handgeblazen Kleinflëssen gemaakt voor het British National Science Museum. Hij moest natuurlijk wel een gat in de wand van zo'n flës maken.

Voor een Kleinflës K van $[0, 2\pi] \times [0, \pi]$ wordt de equivalentierelatie gegeven door $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ dan en slecht dan als geldt:

- (i) $x_1 = x_2$
- (ii) $\{y_1, y_2\} = \{0, 2\pi\}$ en $x_2 = 2\pi - x_1$
- (iii) $\{x_1, x_2\} = \{0, 2\pi\}$ en $y_1 = y_2$
- (iv) $x_1, x_2 \in \{0, 2\pi\}$ en $y_1, y_2 \in \{0, 2\pi\}$

De Kleinflës kan dus geconstrueerd worden vanuit een rechthoek. Als je hem in echter in drie dimensies maakt, dan doorsnijdt hij zichzelf. De Kleinflës doet dat eigenlijk niet, dat kun je in vier dimensies wel voorstellen. In figuur 3 zie je hoe een Kleinflës in drie dimensies ontstaat. Daar plak je beide uiteinden van een cilinder aan elkaar, maar wel net anders dan bij de torus. Nu moet ineens de cilinder door zichzelf heen gaan.

Op deze manier lijkt het eenvoudig om een Kleinflës te maken. In het boek van Sutherland kun je echter abstracte bewijzen vinden voor dit homeomorfisme en lezen dat de Kleinflës een interessante eigenschap heeft, hij heeft namelijk geen volume. •

Referenties

- [1] Sutherland, W.A., "Introduction to metric & topological spaces", Oxford Mathematics

Ronniy's Receptenhoekje

DOOR RONNIY JOSEPH

Je hebt twee categorieën mensen: de mens die kan koken en de mens die niet kan koken. Gelukkig is deze vaardigheid niet genetisch bepaald. Ik heb zelf namelijk nog nooit gehoord van kookgenen. Smaak is niet aangeboren, maar aangeleerd. Hoewel koken soms extreem moeilijk lijkt, zal in deze rubriek het tegendeel worden bewezen.



Het zogenaamd niet kunnen koken is vaak te wijten aan een gebrek aan tijd. Koken schiet er dan vaak bij in en om niet met de gebakken peren te zitten kook je maar iets in de trant van gisteren. Gelukkig hoef je je niet te vervelen, want ook met de opties aardappels, vlees en groente kun je al redelijk wat verschillende combinaties maken.

In deze barre wintertijden wil je graag snel en voedzaam eten. Lang in de keuken staan is geen optie, maar onder een deken tegen de verwarming aankruipen wel. Een ovenrecept is hiervoor een uitkomst, want door de geweldige uitvinding van de oven hoeft een mens niet langer de gehele kooktijd bij te wonen. Hij kan met een gerust hart wegllopen, wetende dat alles goed zal komen.

Hartige ovenschotel

Ingrediënten

- 2-3 grote uien
- 200 ml crème fraîche
- 300 gram geraspte belegen kaas
- 250 gram gerookte spekblokjes
- 450 gram aardappelschijfjes (evt. kant en klaar)
- 5 eieren
- zout en peper
- Provençaalse kruiden
- boter

Bereiding

Als je niet van stress houdt tijdens het koken, dan begin je met de volgende voorbereiding. Verwarm de oven voor op 200°C, of op gasstand vier. Als je principieel tegen het kopen van kant-en-klare aardappel-

Moeilijkheid:**Aantal personen:****Bereidingstijd:** 15-20 + 25 min

schijfjes bent, begin je met het opzetten van een ruime liter water met zout. Terwijl het water kookt, kun je gerust de tijd nemen om de aardappelen te schillen, te wassen, en deze in plakjes te snijden. Vervolgens kun je beginnen met de tearjerkers van de keuken: de uien. Pel ze, halveer deze en snij ze in halve ringen.

Als het water eenmaal kookt, voeg je de handgeschilde aardappelen toe. Deze schijfjes laat je vijf minuten koken, waarna je ze afgiet.

Zodra de aardappelschijfjes opstaan, heb je genoeg tijd om een braadpan met een dikke bodem te pakken. Deze zet je op het fornuis zonder er boter of olie in te doen. De spekjes die hierin gebakken worden, geven namelijk meer dan genoeg vet af. De spekjes bak je ongeveer 2-3 minuten uit. Af en toe omscheppen zal ervoor zorgen dat de spekjes niet te krokant worden. In het vet van de spekjes ga je de uienringen zachtjes meebakken. Draai daartoe het vuur lager en schep de uien erbij. Laat de ui rustig gaar worden. Als het vuur te hard staat, eindig je met krokante uienringen, dus geef de ui de tijd. Zorg er daarentegen wel voor dat de ui beetgaar is, want in de oven zal hij niet veel verder meer garen.

Terwijl de ui rustig in de pan ligt, doe je crème fraîche in een maatbeker. Ieder ander voorwerp waarin je heftig kan roeren zonder te knoeien is ook goed. Breek een van de vijf eieren en voeg die toe. Klop de crème fraîche en het ei los en voeg daarna de overige eieren en peper en zout toe. Je kunt ook alle eieren tegelijkertijd toevoegen, het vervelende hieraan is alleen dat je meer kracht moet gebruiken bij het roeren om de klontjes crème fraîche weg te werken. Voeg tenslotte de helft van de kaas toe aan het eimengsel.

Vet ondertussen de ovenschaal in. Bedek daarna de bodem van de ovenschaal met aardappelschijfjes. Als de ui eenmaal gaar is, breng je deze nog even op smaak met de provencaalse kruiden. Hierna neem je de pan van het vuur en schep je hier het eimengsel doorheen. Zorg er dus niet voor dat je nog even snel die ui gaar wil maken door de pan extreem heet te maken, want ei en extreme hitte betekent een omelet.

Het uiteindelijke ei-mengsel verdeel je over de aardappeltjes. Schud voorzichtig met de ovenschaal om het ei goed te verspreiden en verdeel daarna de overige kaas over de schotel. Deze bak je dan in ca. 25 minuten gaar en goudbruin, terwijl je bij de verwarming gaat zitten met een kop thee. •



Ben je deelbaar?

DOOR SUSAN KLOOSTER

Vroeger hielden niet veel mensen zich bezig met cryptografie, maar door de komst van onder andere bankpassen en websites is cryptografie niet meer weg te denken uit ons dagelijks leven. Grote priemgetallen worden gebruikt binnen de cryptografie om gegevens te beveiligen. De vraag is alleen: hoe kan je controleren of een groot getal een priemgetal is?

Priemgetallen zijn een deelverzameling van de natuurlijke getallen. De negatieve getallen doen daarom dus niet mee. We noemen een getal een priemgetal als hij alleen deelbaar is door zichzelf en door 1 zodat na deling weer een natuurlijk getal wordt verkregen. Verder spreken we af dat 1 geen priemgetal is. Voor kleine getallen is het vrij eenvoudig om na te gaan of het een priemgetal is, maar voor grote getallen wordt dit anders.

RSA

Om een beeld te geven van cryptografie wordt eerst een specifiek algoritme, namelijk RSA, uitgelegd. RSA is een veelgebruikt algoritme voor elektronisch dataverkeer. Het werd in 1977 bedacht door de heren Rivest, Shamir en Adleman, waar het zijn naam aan dankt. De veiligheid van RSA steunt op de moeilijkheid van de ontbinding in factoren bij grote getallen. Vanuit de vermenigvuldiging van twee grote priemgetallen $p \cdot q$ is het bijna onmogelijk p en q terug te bepalen. Hier gaat te veel tijd in zitten omdat er geen manier is om dit snel te kunnen doen. Als wiskundigen er wel in slagen om de priemgetallen terug te vinden, kan RSA onbruikbaar worden.

We kunnen een geheimschrift maken door permutaties (verwisselingen) voor de letters van het alfabet te nemen, bijvoorbeeld zo:

a	b	c	d	e	f	...
y	d	l	h	i	p	...

Een tekst kunnen we dan coderen door het toepassen van de permutaties op de letters van de tekst. Het resultaat is ook weer te decoderen door de inverse van de permutatie uit te voeren. Wanneer we een tekst gaan

coderen en decoderen met bovenstaande code, dan zal het decoderen iets langzamer gaan omdat de onderste rij niet in de gebruikelijke volgorde staat. Het kan ook zijn dat de gehanteerde code niet bekend is. Dan wordt decoderen een stuk lastiger, maar niet onmogelijk: met genoeg beschikbare tekst en een hoop tijd lukt het decoderen alsnog. RSA is een geheimschrift waarbij het decoderen een bijna onmogelijke klus is, zelfs al is de code bekend. Er worden niet alleen letters gepermuteerd maar bijvoorbeeld alle woorden. Stel je voor dat iemand in het woordenboek achter elk woord zijn permutatie schrijft, om dan een tekst te gaan decoderen heb je een hoop geduld en tijd nodig.

Stel, we hebben Alice en Bob en Alice wil dat Bob haar een geheim bericht kan sturen, bijvoorbeeld via het internet. Daarvoor heeft ze een publieke sleutel en een geheime sleutel nodig, want het idee achter RSA is:

- Neem twee willekeurig gekozen grote priemgetallen $p \neq q$ en bereken $N = qp$.
- Kies een geheel getal $1 < e < N$ dat relatief priem is met $(p - 1) \cdot (q - 1)$. Dat betekent dat de grootste gemeenschappelijke deler van e en $(p - 1) \cdot (q - 1)$ gelijk is aan 1.
- Bereken d zodanig dat $e \cdot d \bmod (p - 1)(q - 1) \equiv 1$.
- Zorg ervoor dat jouw p en q door niemand terug te vinden zijn.

De tweede en derde stap zijn uit te voeren met het Euclidisch algoritme, een algoritme die de grootste gemeenschappelijke delers van twee getallen bepaalt. We hebben nu N en e als publieke sleutels en d als geheime sleutel. Alice kan dan de publieke sleutels naar Bob sturen via het internet en d geheim houden. Nu wil Bob een bericht m naar Alice verzenden. Hij heeft

de publieke sleutels N en e en kan de boodschap m omzetten in een getal n . Dit doet hij met een eerder afgesproken code. Hij verzendt $c \equiv n^e \pmod{N}$ naar Alice. Dit zijn bewerkingen die een computer vrij snel kan doen. Alice kan de boodschap dan ontcijferen met $c^d \pmod{N} \equiv n$.

Priemtesten

Zoals nu enigszins duidelijk is geworden zijn grote priemgetallen erg belangrijk. Maar hoe controleren we of een getal priem is? De meest eenvoudige test is van een mogelijk priemgetal p controleren of een geheel getal m tussen 2 en $p - 1$ een deler is van p , dus of p/m een geheel getal geeft. Als p deelbaar is door een m , dan is p samengesteld, anders is p een priemgetal. Deze test kan eenvoudig verbeterd worden. In plaats van de getallen van 2 tot $p - 1$ te controleren in het voldoende om te controleren tot $\sqrt{p}$. Als p namelijk het product is van twee gehele getallen, dan is in ieder geval een van beide kleiner of gelijk aan $\sqrt{p}$. De test kan nog efficiënter worden gemaakt door alle even getallen over te slaan behalve 2. Door op te merken dat alle priemgetallen van de vorm $6k \pm 1$ zijn, met als enige uitzondering 2 en 3, kan het nog sneller. Priemgetallen moeten van deze vorm zijn, want $(6k + 0)$, $(6k + 2)$, $(6k + 4)$ worden allemaal gedeeld door 2 en de enige andere optie, $(6k + 3)$, wordt gedeeld door 3. Het is dus voldoende om alle getallen te controleren van de vorm $6k \pm 1 \leq \sqrt{p}$. Als p groot is, is alle mogelijke delers testen een ondoenlijk karwei.

Een andere eenvoudige, maar erg inefficiënte methode gebruikt de stelling van Wilson. Deze zegt dat p een priemgetal is dan en slechts dan als

$$(p - 1)! \equiv -1 \pmod{p}$$

Omdat je hier ongeveer p modulaire vermenigvuldigingen doet, is deze methode niet handig.

Er zijn ook priemtesten die niet aangeven of het gegeven getal priem is, maar of het priem zou kunnen zijn. Een voorbeeld hiervan is de kleine stelling van Fermat. Deze stelling zegt dat als p

een priemgetal is en $1 \leq a < p$, dan volgt dat $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. We kunnen deze test uitvoeren voor een willekeurige a . Als we een aantal a 's hebben geprobeerd en de stelling lijkt waar, dan is p waarschijnlijk priem. Als de stelling niet waar lijkt te zijn is p een samengesteld getal. Het kan dus voorkomen dat we denken dat we een priemgetal hebben omdat we alleen a 's gekozen hebben waarvoor de stelling waar blijkt te zijn. We noemen een a die doet vermoeden dat p priem is terwijl hij dat niet is, een *Fermat liar*, p noemen we dan *Fermat pseudoprime* voor een gegeven a . Wanneer we een a gekozen hebben die de test terecht afwijst noemen we dit een *Fermat witness*.

Deze test heeft echter een aantal nadelen. Er zijn bijvoorbeeld getallen, Carmichael-getallen genaamd, waarvoor geldt dat voor alle a met $\text{ggd}(a, p) = 1$ deze *Fermat liars* zijn. Als p geen Carmichael-getal is, zijn gelukkig minstens de helft van alle getallen tussen 1 en p Fermat witnesses.

Hoewel er weinig van deze Carmichael-getallen bestaan, wordt vaak de Miller-Rabin-test gebruikt in plaats van de kleine stelling van Fermat. De Miller-Rabin-priemtest is, net als de kleine stelling van Fermat, gebaseerd op vergelijkingen die waar zijn voor priemgetallen, zodat we voor gegeven getallen een test kunnen uitvoeren om te kijken of het getal priem is. Deze test is echter een stuk efficiënter dan de Fermat-test. Dit algoritme geeft snel en met een hoge waarschijnlijkheid aan dat het gegeven getal niet priem is. In minder dan een kwart van de gevallen zal de test een een samengesteld getal niet als samengesteld aanmerken. Dit is voor de meeste commerciële doeleinden voldoende. Meer over deze test is te lezen in het artikel *Four primality testing algorithms* van René Schoof.

We hebben gezien dat priemtesten er in allerlei soorten zijn: van simpel en inefficiënt tot ingewikkeld, maar niet altijd juist. •

Referenties

- [1] René Schoof, Four primality testing algorithms, www.mat.uniroma2.it/~schoof/millerrabinpom.pdf
- [2] Willers, M., *Algebra*
- [3] Keune, F., *Getallen*

Schulden van de schatkist

DOOR HERBERT KRUITBOSCH

Economische crisis, staatsschulden en bezuinigingen. Als bèta wil je er eigenlijk niets mee te maken hebben, daar heb je toch economen voor? Zij zorgen dat de economie waar jij in leeft gezond blijft, zodat je genoeg geld hebt voor lasers en deeltjesversnellers. Maar nu hoor je in het nieuws allerlei problemen zoals de instortende huizenmarkt en de kredietcrisis. Misschien is het toch eens tijd er een kijkje naar te nemen.

Het laatste economische beleid dat ik heb gevoerd was voor de bewoners van mijn *Sim City 2000*-stad. Als ik geld nodig had, dan typte ik *fund* en er kwam geld voor huizen en energiecentrales. Zo makkelijk is het voor de regering natuurlijk niet, waar halen zij hun geld eigenlijk vandaan?

Schatkist van de overheid

Vorig jaar was er een slordige 16 miljard euro nodig om een bank te kopen. Gaan zulke bedragen dan zomaar van een lopende rekening af? Het antwoord is natuurlijk nee, want wie zet er nou zoveel geld op een lopende rekening? Daardoor zou je ontzettend veel rente mislopen. Omdat we een staatschuld hebben, lijkt het ook onaannemelijk dat de overheid zo'n bedrag op een spaarrekening heeft staan. Je betaalt immers meer rente voor een lening dan je voor spaargeld ontvangt, voor de overheid geldt precies hetzelfde.

De regering heeft een lopende rekening bij De Nederlandsche Bank, daar staat aan het einde van een dag tussen de 0 en 50 miljoen euro op. Om deze rekening op pijl te houden schrijft de staat leningen uit. Zo'n lening heeft een bepaalde looptijd, afhankelijk van het bedrag en het doel waarvoor het geleend is. De kleinste lening die de staat uitschrijft is het schatkistpapier, deze is er vanaf 250.000 euro en heeft een looptijd van tussen de zes en twaalf maanden. Zo kunnen bijvoorbeeld gemeentes op korte termijn aan geld komen. Daarnaast kan de staat ook geld lenen van of uitlenen aan andere staten die de euro gebruiken.

Maar met leningen van 250.000 euro kom je nog niet zomaar aan een slordige 300 miljard euro staats-

schuld die de overheid nu heeft, je zou dan voor iedere miljard euro 4000 leningen moeten uitschrijven. De staatsschuld bestaat grotendeels uit obligaties. Die hebben vaak een looptijd van 10 jaar, maar soms ook van 5 of 30 jaar. Zo'n obligatie kan wel voor 30 miljard euro zijn, maar dat is zeldzaam. Meestal liggen ze rond de 12 miljard euro. De schulden van de staat zijn niet geheim: op de website van het Agentschap van de Generale Thesaurie [1] wordt maandelijks gepubliceerd waar onze overheid precies schulden heeft en hoeveel deze schulden bedragen.

Geld voor banken

Zo'n nationale, centrale bank als De Nederlandsche Bank heb je in een of andere vorm wel in ieder land van de EU. Maar hoe komen zij nou aan geld? Dat gaat via de Europese Centrale Bank, de ECB. Zij zijn verantwoordelijk voor het monetaire beleid in de eurolanden. Dat zijn alle landen die met de euro betalen. De ECB maakt al het geld, gewoon met een geldprinter, en dat geld deelt ze uit aan andere banken zoals De Nederlandsche Bank. Al dat geld heet de *monetaire basis*. Nationale, centrale banken kunnen bij de ECB geld lenen tegen een bepaalde rente. Op hun beurt kunnen andere commerciële banken weer geld lenen van nationale, centrale banken, die misschien een andere rente dan de ECB vragen. De Nederlandsche Bank is verschillend van andere banken doordat zij wordt bestuurd door het ministerie van Financiën en haar beleid dus wordt bepaald door de overheid.

De ECB probeert ervoor te zorgen dat er prijsstabiliteit is, dat wil zeggen dat jaarlijks de inflatie ongeveer 2% is. Waar je eerst 100 euro voor betaalde, betaal je dus

wijzigingsdatum refirente

14 maart 2007	3,75%
13 juni 2007	4,00%
9 juli 2008	4,25%
8 oktober 2008	3,75%
6 november 2008	3,25%

wijzigingsdatum refirente

4 december 2008	2,50%
15 januari 2009	2,00%
5 maart 2009	1,50%
2 april 2009	1,25%
7 mei 2009	1,00%

een jaar later 102 euro voor. Dit geeft de markt genoeg tijd om geld te investeren zonder dat het ineens geen waarde meer heeft, terwijl aan de andere kant investeren wel de moeite waard is. Ook probeert de ECB de koers van de euro ten opzichte van andere muntenheden stabiel te houden. Dit wordt wisselkoersstabiliteit genoemd. Omdat prijsstabiliteit betrekking heeft tot de euro-economie, dus waar men in Europa met de euro betaalt, wordt dit wel de binnenwaarde genoemd. De ECB geeft voorrang aan een stabiele binnenwaarde ten opzichte van wisselkoersstabiliteit. Voor de euro ingevoerd werd, gaf De Nederlandsche Bank voorrang aan wisselkoersstabiliteit, omdat buitenlandse handel essentieel is voor de Nederlandse economie.

De ECB wil de inflatie onder controle houden door de refirente, de rente die de ECB aan centrale banken vraagt voor krediet, te veranderen. Om de gevolgen van de financiële crisis te beperken, heeft zij daarom deze rente tussen juni 2008 en mei 2009 van 4,25% naar 1,00% verlaagd ([2] en [5]). Met de hoogte van deze rente wil de ECB banken en investeerders beïnvloeden. Het maakt voor de financiële positie van de ECB zelf niet zoveel uit dat de rente lager wordt, alle binnengekomen rente wordt namelijk vernietigd. Hieronder staan andere gevolgen van deze verlaging.

De hypotheekrentes zijn gedaald, zodat minder mensen problemen krijgen om hun vaste lasten te betalen. Zodra iemand een hypotheek niet meer kan betalen, kan een bank voor een executieverkoop van het onderpand, bijvoorbeeld een huis, kiezen. Bij het afsluiten van zo'n hypotheek gingen banken er echter vaak vanuit dat zo'n huis op dit moment veel meer waard zou zijn. Nu dit niet zo blijkt te zijn zou zo'n verkoop al snel niet voldoende opleveren om de schuld van de hypotheek af te lossen en krijgt de bank zijn uitstaande krediet dus niet volledig terug. Als er minder klanten zijn die hun hypotheeklasten niet meer kunnen betalen, hebben banken daar dus veel baat bij. Natuurlijk

is het voor de hypotheekgever ook leuk om in je huis te mogen blijven wonen en niet met een restschuld te blijven zitten.

Doordat banken bang zijn dat uitstaande leningen niet meer zomaar terugkomen, zijn zij terughoudender met leningen uitschrijven en vragen ze, ondanks de lage refirente, een hogere rente. Veel banken stellen dat er nog een te groot risico is op leningen zonder onderpand [3]. De spaarrente is tevens omlaag gegaan. Dit is ook te verwachten naar aanleiding van de verlaging van de refirente. Er is nog een factor die de spaarrente bepaald. Als een bank meer krediet nodig heeft dan ze kan krijgen van de ECB, dan wil ze spaarders trekken. In dat geval zal een bank een hogere spaarrente uitkeren. Wanneer deze noodzaak er niet is, dan zal een bank een lagere spaarrente aanbieden dan de refirente. Dan zijn spaarders immers alleen voordelig als ze goedkoper zijn dan de ECB. Omdat deze behoefte er nu wel is, bieden banken dus een hogere rente dan de ECB, maar door de lage refirente ligt de spaarrente alsnog heel laag.

Na deze introductie in het Europese monetaire systeem wil ik nog één belangrijke boodschap plaatsen. Natuurlijk kan de ECB beïnvloeden hoe investeerders en banken met geld omgaan, maar de effecten van zo'n refirente kunnen niet een mislukte oogst compenseren. Hoogstens kunnen ze regelen dat consumenten hun geld aan eten en onderdak uitgeven in plaats van aan risicovolle auto's. Kan een hypotheekcrisis dan wel opgelost worden? Jij mag het zeggen. •

Referenties

- [1] Agentschap van de Generale Thesaurie, www.dsta.nl
- [2] Europese Centrale Bank, www.ecb.int
- [3] Money Magazine, "Leenrente daalt niet", www.moneymagazine.nl
- [4] Europese Centrale Bank, "De uitvoering van het monetaire beleid," www.ecb.nl
- [5] global-rates, "ECB refirente," nl.global-rates.com

Van bakker tot wiskundige

DOOR BART VISSER

George Green, de bakkerszoon die een befaamd wiskundige werd, is voor- namelijk bekend van de Stelling van Green. Deze geeft de relatie tussen een kringintegraal rond een simpele gesloten kromme en een oppervlakte-integraal over het oppervlak omsloten door de kromme. Green was ook de eerste persoon die een wiskundige theorie van elektriciteit en magnetisme opstelde, die de grondslag vormde voor het latere werk van onder andere Thomson en Maxwell. Het bijzondere aan dit verhaal is dat Green bijna al zijn wiskundige kennis door zelfstudie heeft verworven.

Het verhaal van George Green begint in het plekje Sneinton, nabij Nottingham in Engeland. Greens vader, ook een George, was een bakker in Nottingham die zijn eigen molen had. Samen met Sarah Butler kreeg hij in juli 1793 een zoon. Hoewel zijn exacte geboortedatum niet bekend is, weten we wel dat George jr. op 14 juli 1793 is gedoopt. Als zoon van de plaatselijke bakker werkte hij in de bakkerij van zijn vader, iets wat hij helemaal niet leuk vond. Hij had echter geen andere keus. Zoals gewoonlijk in die tijd, begon hij op vijfjarige leeftijd al volledige dagen te werken.

Robert Goodacre's Academy

George's vader erkende het bovengemiddelde intellect van zijn zoon en stuurde hem daarom in maart van het jaar 1801 naar de Robert Goodacre's Academy. Hij was slechts acht jaar oud toen hij begon met studeren, maar verliet de academie al na een jaar om weer te gaan werken in zijn vaders bakkerij. Volgens sommigen omdat hij alles al had geleerd wat de school hem te bieden had.

Het is moeilijk te begrijpen hoe het komt dat Green op zijn leeftijd zo geïnteresseerd raakte in de wiskunde. Ook is het niet bekend of hij toegang had tot enig wiskundig werk. Robert Goodacre was een zeer



bekende sympathisant van de wetenschap en leraar uit die tijd. Voor de buitenwereld stond hij bekend als iemand met veel kennis van de wetenschap en de wiskunde. Uit zijn publicaties blijkt dat Goodacres wiskundige kennis echter beperkt bleef tot de algebra, goniometrie en logaritmen. De wiskundige bijdragen van Green kunnen logischerwijs niet het gevolg zijn geweest van zijn verblijf aan de Robert Goodacre Academy.

Autodidact

Green moet tijdens de jaren dat hij werkte in zijn vaders bakkerij gewoon door zijn gegaan met de wiskunde, maar we hebben eigenlijk geen idee hoe hij zich de meest geavanceerde wiskunde van die tijd eigen heeft gemaakt. De enige manier dat hij ermee in aanraking kan zijn gekomen is via John Toplis. John had zijn wiskundegraad op Cambridge gehaald en woonde slechts een straat verderop vanwaar Green destijds woonde.

In 1823 werd Green lid van de Nottingham Subscription Library. Dit was een belangrijk moment voor zijn wetenschappelijke ontwikkeling omdat het hem toegang gaf tot enkele wetenschappelijke werken. Pas toen, op 30-jarige leeftijd, kon Green het meest recente wiskundige werk lezen.

Green studeerde wiskunde op de bovenverdieping

van de molen van zijn vader. Het was geen gemakkelijke tijd: hij werd vader van twee kinderen en zijn vader en moeder kwamen te overlijden. Ondanks deze moeilijke omstandigheden en zijn beperkte wiskundige achtergrond, publiceerde Green in 1828 één van de belangrijkste wiskundige werken ooit: *An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism*. In de inleiding wordt vermeld dat hij geen goede historische inleiding kan geven voor de wiskundige theorie van elektriciteit, er worden dan ook bijna geen bronnen gegeven. Het essay mag dan veel belangrijk werk bevatten, destijds werd het niet gezien. Niemand met voldoende wiskundige kennis die het belang van het werk kon erkennen had Greens essay onder ogen gekregen.

Sir Bromhead

Na de dood van zijn vader werd Green alleen verantwoordelijk voor het familiebedrijf. Zijn situatie zou echter veranderen toen Green in contact kwam met Sir Edward Bromhead.

Sir Edward Bromhead was een van de ondertekenaars van Green's essay en had aangeboden eventuele andere publicaties op te sturen naar de wetenschappelijke gemeenschap. Bromhead studeerde wiskunde in Cambridge, desondanks was hij niet in staat het belang van Green's essay in te zien. Hij had echter wel door dat Green een zeer goed wiskundige was. In eerste instantie sloeg Green het aanbod van Bromhead af, pas na enig aandringen maakte Green daar een jaar later gebruik van.

Gedurende drie jaar ontmoetten Green en Bromhead elkaar regelmatig en tijdens deze periode schreef Green drie artikelen. Aangezien Bromhead goede contacten had met wiskundigen bij Cambridge deed hij Green het voorstel wiskunde te gaan studeren. In juni 1833 begon Green met zijn studie wiskunde aan het Caius College in Cambridge. De wiskundetentamen gingen Green gemakkelijk af, maar hij had wel moeite met het Latijn en Grieks. Niet verwonderlijk voor iemand die maar een jaar op school heeft gezeten. Green studeerde uiteindelijk in 1837 af en bleef daarna bij de



De molen van Green in Sneinton, vlakbij Nottingham, Engeland.

universiteit om aan zijn eigen wiskunde te werken.

Postume faam

In mei 1840 ging Green terug naar Nottingham vanwege zijn slechte gezondheid. Een jaar later stierf hij. Helaas heeft Green nooit het belang van zijn wiskunde geweten. Slechts enkele weken voor het overlijden van Green, begon William Thomson te studeren in Cambridge. Pas enkele jaren later weet Thomson de hand te leggen op een exemplaar van Green's essay, die hij vervolgens opnieuw publiceert. Via Thomson, Maxwell en anderen zou de algemene wiskundige theorie van potentialen, ontwikkeld door een simpele bakkerszoon, leiden tot de wiskundige theorieën van elektriciteit en magnetisme van de twintigste eeuw. •

Referenties

- [1] www.history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Green.html

Uit het onderzoek

Super warmtegeleiding

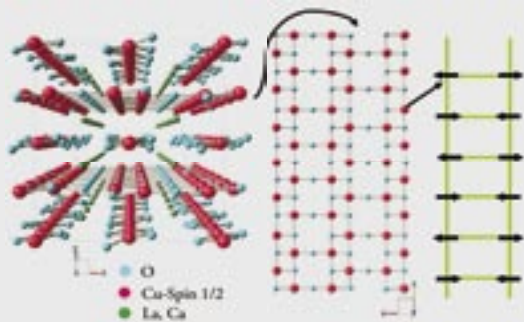
DOOR MARIAN OTTER EN PAUL H.M. VAN LOOSDRECHT

Laagdimensionale kwantumspinsystemen zijn niet alleen interessant voor de fundamentele wetenschap. Onlangs hebben onderzoekers laten zien dat deze materialen bijzonder goede warmtegeleiders zijn, mogelijk zelfs een soort ‘supergeleiders’ voor warmte. Op basis hiervan is een Europees onderzoeksproject opgezet waarin onderzocht wordt of deze materialen een bijdrage kunnen leveren aan het oplossen van een van de belangrijkste problemen in de huidige elektronica: het efficiënt, gericht en snel afvoeren van warmte in micro-elektronische componenten.

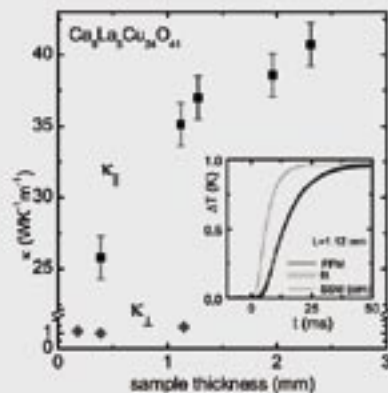
In ‘normale’ materialen wordt warmte getransporteerd door middel van elektronen (metalen) en/of roostertrillingen, ook wel fononen genoemd (isolatoren). Het warmtetransport is doorgaans isotroop. In laagdimensionale kwantumspinsystemen, die jarenlang bestudeerd zijn vanwege hun interessante fundamentele eigenschappen, blijkt dit anders te liggen. We hebben het hier bijvoorbeeld over de zogenaamde spin-ladder materialen, waarvan de naam direct verband houdt met de structuur. In een kristal van dit materiaal bevinden zich namelijk vlakken met koper- en zuurstofionen, zie figuur 1. De spins van de koperionen zijn gerangschikt in een ladderstructuur. Wanneer nu een spinpaar in een aangeslagen toestand wordt gebracht, kan deze zich alleen in de richting van de ladder voortbewegen. Dit komt doordat de interactie tussen de ladders veel zwakker is dan langs de ladder. In onze spin-ladder kan energie en dus warmte niet alleen worden verplaatst door middel van fononen, maar ook door magnonen (excitatie van spins). Elektronen leveren geen bijdrage omdat het materiaal niet-geleidend is. Hoe goed warmte wordt geleid, wordt gespecificeerd door de warmtegeleidingscoëfficiënt κ . Het verassende is dat de bijdrage van de magnonen ($\kappa \sim 100 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$) twee ordes van grootte groter is dan die van de fononen ($\kappa \sim 1 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$). Bovendien is de warmtegeleiding bij kamertemperatuur vergelijkbaar met die van metalen. We hebben hier dus te maken met een zeer goede (bijna) een-dimensionale warmtegeleider.

Warmtegeleiding meten

In het algemeen wordt warmtegeleiding gemeten door een constante warmtestroom door een stukje kristal te laten gaan en te meten wat het temperatuurverschil is tussen twee punten in dat kristal. Het is dus een statische methode (*steady state method*, SSM). Om omstandigheden in een echte elektronische component zo goed mogelijk na te bootsen, willen we echter meten hoe een warmtepuls zich in de tijd verspreidt door het materiaal. Een intuïtief logische manier om dit te doen is door te meten hoe lang warmte moet reizen van één kant van een kristal naar de andere kant. Dit doen we door een kristal zo te snijden dat het twee parallelle vlakken heeft. Vervolgens verhitten we het ene vlak met een korte warmtepuls en meten we van het andere vlak de temperatuur als functie van de tijd. Door het hele oppervlak gelijkmatig te verhitten met een laserpuls maken we het experiment in essentie eendimensionaal, wat de data-analyse een stuk makkelijker maakt. De temperatuur aan de andere kant meten we door middel van een opgebracht laagje werkzame stof in een polymeer. Deze stof zendt, wanneer het wordt beschienen met UV-licht, oranje licht uit waarvan de intensiteit exponentieel afhangt van de temperatuur. De verandering van de intensiteit is dus een zeer nauwkeurige temperatuursensor. Het polymeer zorgt voor stevigheid en stabiliteit van het laagje. Deze methode noemen we de *fluorescent flash method* (FFM). Door het experiment



FIGUUR 1 Kristalstructuur van een spin-ladder materiaal. Het middelste beeld laat het kristalvlak zien waarin de spins zich bevinden. De schematische afbeelding rechts geeft de spins van koperionen weer.



FIGUUR 2 Thermische geleidingscoëfficiënt κ als functie van de dikte van $\text{Ca}_9\text{La}_5\text{Cu}_{24}\text{O}_{41}$ -kristallen gemeten bij kamertemperatuur met de FFM.

gedetailleerd te modelleren met behulp van de analytische oplossing voor dit eendimensionale probleem kunnen we zo de thermische geleidingscoëfficiënt κ bepalen.

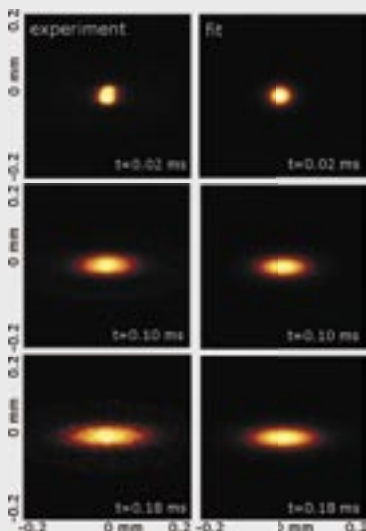
Afwijkende resultaten

Voor de spin-ladder verbinding $\text{Ca}_9\text{La}_5\text{Cu}_{24}\text{O}_{41}$ hebben we op deze manier κ bepaald voor stukjes kristal van verschillende dikte. De resultaten zijn te zien in figuur 2. Geplot zijn κ parallel aan de ladders (zwarte vierkanten) en loodrecht op de ladders (grijze ruiten). De inzet toont een typische gemeten curve, samen met een theoretische curve, van de temperatuurverandering van één kant van het kristal nadat er op tijdstip 0 een warmtepuls op de andere kant gegeven is. Verschillende dingen vallen op. Ten eerste is de waarde voor de meting loodrecht op de ladder in overeenkomst met de waarde van de statische methode. Er is geen dikteafhankelijkheid te zien. Ten tweede is de waarde voor de meting parallel aan de ladders zo'n 2,5 keer kleiner dan de waarde gemeten in de statische methode, $85 \text{ W m}^{-1}\text{K}^{-1}$ voor dit specifieke kristal. In de inzet is een gesimuleerde curve geplot waarin de waarde van κ is genomen zoals gemeten in de SSM. Het is duidelijk te zien hoezeer die curve verschilt van de gemeten curve en dat dit verschil veel groter is dan de meetfout. Tenslotte is er een dikteafhankelijkheid in de richting parallel aan de ladders. Nu moeten we een beter model gaan opstellen om onze bevindingen te verklaren.

Twee-temperaturenmodel

Normaal gesproken gaat men ervan uit dat de magnonen en fononen in thermisch evenwicht zijn door verstrooiingsprocessen. Hierdoor is de gemeten κ gelijk aan de bijdrage van de magnonen plus de bijdrage van de fononen. Dit betekent ook dat de temperatuur van de magnonen op elk moment gelijk is aan de temperatuur van de fononen. Dit hoeft echter niet zo te zijn. Als de koppeling tussen de magnonen en fononen zwak is, dan kan het zo zijn dat het magnetische spins en het kristalrooster gedurende enige tijd nadat de warmtepuls afgegeven is ieder een eigen temperatuur hebben. In spin-ladders blijkt de koppeling tussen magnonen en fononen inderdaad zeer zwak te zijn. Dit is het gevolg van de sterk beperkte mogelijkheden om energie, spin en impuls te behouden in verstrooiingsprocessen waarbij magnonen in fononen veranderen, of fononen in magnonen. Hierdoor kan het lang duren voordat volledig thermisch evenwicht wordt bereikt. Maar duurt dat net zo lang (of zelfs langer) dan de milliseconden tijdschaal van ons experiment? De experimenten suggereren van wel; alleen bij een 'reistijd' in de ordegrootte van de thermalisatietijd, de tijd waarin thermisch evenwicht wordt bereikt, zou een dikteafhankelijkheid moeten optreden. De thermalisatietijd is echter nooit experimenteel bepaald.

Waar we momenteel aan werken is het uitbreiden van het gebruikelijke een-temperatuurmodel naar een twee-temperaturenmodel dat de temperatuurstijging



FIGUUR 3 Warmtegeleiding in de spin-ladder $\text{Ca}_7\text{La}_5\text{Cu}_{24}\text{O}_{41}$ langs het kristaloppervlak voor verschillende tijdstippen gemeten vanaf het creëren van de hot spot.

aan de achterzijde van het kristal beschrijft als functie van de thermische geleiding van de magnonen en fononen en de thermalisatietijd van deze twee warmte-dragers. Hiermee kunnen we hopelijk onze resultaten beschrijven en iets zeggen over de thermalisatietijd van magnonen en fononen in spin-ladders. Verder doen we *pump-probe* metingen aan deze materialen om iets te kunnen zeggen over wat er op heel korte tijdschalen gebeurt. In zo'n meting creëer je op tijdstip 0 excitaties in het materiaal met een laserpuls (de pump) en meet je met een andere laserpuls (de probe) de verandering in transmissie of reflectie van het materiaal. Deze tweede puls is verschoven in de tijd. Als je voor genoeg tijdsverschuivingen meet, kun je de dynamica van het systeem in kaart brengen. Typische tijdschalen van zo'n experiment zijn 10^{-14} tot 10^{-9} seconden. Wanneer je de positie van de pump en de probe puls op het kristal verschuift ten opzichte van elkaar denken we dat het zelfs mogelijk is om ballistisch magnonen-transport waar te nemen en daarmee de theorie die ten grondslag ligt aan dit project te bevestigen.

Warmtetransport langs het oppervlak

Een variatie op ons FFM-experiment is met een gefocuste laserpuls een hot spot te creëren aan de kant waar ook het laagje is aangebracht dat de temperatuur meet. Nu is ook de excitatie van dit laagje met UV-licht gepulst. Zo kunnen we in dit experiment, door de tijd tussen verhitten en meten in stapjes te verander-

ren, de evolutie van de warmte in de hot spot langs het oppervlak volgen. Het is dus bijna letterlijk mogelijk de magnonen te zien 'vliegen'! Een resultaat van dit soort meting is te zien in figuur 3. De ladders liggen hier horizontaal. De linker kolom laat de meting zien. Elke afbeelding is genormaliseerd, omdat de temperatuur in korte tijd zoveel daalt dat je anders op latere tijdstippen bijna niks meer zou zien. Het is duidelijk dat de warmte zich voornamelijk langs de ladders verspreidt. De rechter kolom laat een theoretische fit van de data zien. In deze meting hebben we te maken met een driedimensionaal, anisotropisch probleem dat niet analytisch op te lossen is. Daarom lossen we de bijbehorende warmtevergelijking numeriek op, waarbij we ook rekening houden met de lengte van de warmtepuls, de UV-puls en de initiële condities. Uit de fit kunnen we zowel de thermische geleidingscoëfficiënt langs de ladders, als loodrecht op de ladder halen. Het blijkt dat beiden ongeveer een factor twee kleiner zijn dan wat we meten in een bulkexperiment. Dit kan verschillende oorzaken hebben. De belangrijkste zijn oppervlakteruwheid en mogelijke lokale veranderingen in de kristalstructuur door reacties met zuurstof uit de lucht. Deze methode geeft mooie afbeeldingen en is belangrijk voor toepassingen, maar is niet geschikt om een betrouwbare bulkwaarde te krijgen.

Behalve dit onderzoek zijn er natuurlijk nog veel meer interessante onderzoeken binnen de vakgroep *Optical Condensed Matter Physics*. Er wordt bijvoorbeeld ook gewerkt aan fundamenteel begrip van nieuwe materialen met bijzondere eigenschappen, zoals gefrustreerde magneten en multiferroïsche materialen, aan het ultrasnel optisch schakelen van magnetisme in bijvoorbeeld magnetische halfgeleiders, aan het begrijpen van de initiële ladingsscheidingsprocessen in plastic zonnecellen en aan de dynamica van water. Er zijn altijd projecten beschikbaar voor studenten, dus als het je leuk lijkt om met behulp van state-of-the-art lasers en spectroscopie interessante en uitdagende fysica te doen, kijk dan eens op <http://ocmp.phys.rug.nl/>, of nog beter, kom eens langs. •

Onder water ademen

DOOR BART VISSER

Al van oudsher heeft de mens naar manieren gezocht om de wereld onder water te kunnen verkennen: van grote duikklokken in de 16e eeuw tot de zware duikhelmen uit het begin van de vorige eeuw. Pas met de uitvinding van de duikcilinder werd de onderwaterwereld echt goed toegankelijk. Door dat de zuurstof nu mee onder water wordt genomen, kunnen plaatsen bereikt worden die eerder onbereikbaar waren. Maar hoe werkt zo'n duikcilinder nu precies en waar moet je bij het duiken allemaal rekening mee houden?

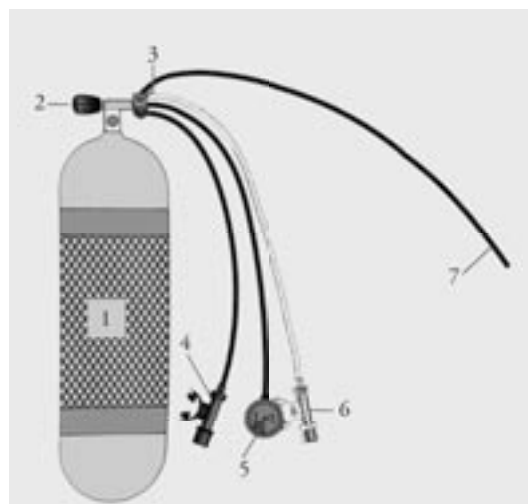
Een duikcilinder wordt gebruikt om onder hoge druk lucht op te slaan. Onder water levert het zuurstof voor de duiker. De typische inhoud van een duikcilinder ligt tussen de 3 en 18 liter, dat onder een druk van 200 tot 300 bar staat. Vanwege deze hoge druk worden duikcilinders meestal van staal gemaakt. Als duikers meerdere flessen mee moeten nemen, worden ze ook wel van aluminium gemaakt. Aluminium duikcilinders hebben namelijk een groter drijfvermogen dan de stalen variant.

Met alleen de opslag van lucht ben je er echter nog niet. De lucht moet natuurlijk ook op de goede manier bij de duiker terecht komen. Dit gebeurt met behulp van een aantal verschillende onderdelen. De zuurstof komt eerst langs de kraan, die de luchtstroom van en naar de cilinder regelt.

Je kan alleen onder water ademen als de luchtdruk gelijk is aan de omgevingsdruk. Onder water staat het menselijk lichaam onder grote druk van het water. Het luchtmengsel moet aangevoerd worden met een druk die exact gelijk is aan de omgevingsdruk. Deze wordt gemeten door middel van een drukmeter. Om de druk gelijk te maken is er de gasdrukregelaar. Die bestaat uit een serie ventielen die het gas op een gecontroleerde manier uit de gascilinder laten stromen. Elk ventiel verlaagt de gasdruk totdat de druk gelijk is aan de omgevingsdruk. De eerste fase van de drukregelaar zit aan de cilinder vast en verlaagt de gasdruk tot een druk die ongeveer 10 bar hoger is dan de omgevingsdruk. In het mondstuk bevindt zich de tweede fase van de drukregelaar. Een zogenaamde *demand valve*

detecteert wanneer de duiker begint in te ademen en levert dan lucht met de juiste druk. De demand valve bevat een kamer die in de normale situatie lucht bevat met een druk die gelijk is aan de omgevingsdruk. Via een ventiel kan lucht met een iets hogere druk de kamer binnenstromen. Het mondstuk is aangesloten op de kamer, zodat de duiker kan ademen. Aan één kant van de kamer bevindt zich een flexibel diafragma om de werking van het ventiel te reguleren.

Wanneer de duiker probeert in te ademen, wordt de druk in de kamer verlaagt. Hierdoor verplaatst het dia-



FIGUUR 1 Verschillende onderdelen van de duikcilinder: 1. gascilinder, 2. kraan, 3. drukregelaar, 4. primair mondstuk, 5. drukmeter, 6. secundair mondstuk en 7. slang voor het drijfvermogen.

fragma richting een veer, die wordt ingedrukt. Hierdoor opent het ventiel zich. Het gas van iets hogere druk zet uit, waardoor de druk daalt en het eventuele water uit de kamer wordt geblazen. Zodra de kamer gevuld is, verplaatst het diafragma zich weer in de normale positie en sluit zo het ventiel weer af. Wanneer de duiker uitademt, verlaat het gas de kamer via luchtdichte ventielen onder de druk van het uitademen. Zodra het uitademen stopt, sluiten de ventielen zich weer, waardoor de druk in de kamer wordt verlaagd tot de omgevingsdruk.

Onder water is het natuurlijk wel handig om in de gaten te houden hoeveel lucht je nog over hebt. De gasdrukregelaar heeft daarom een hogedrukslang die naar een drukmeter gaat. De drukmeter meet de gasdruk in de duikcilinder, waardoor de hoeveelheid gas in de cilinder kan worden bepaald. Zo weet de duiker hoe lang hij nog onder water kan blijven.

Luchtmengsels

Afhankelijk van hoe diep en waar de duik plaatsvindt, neemt de duiker verschillende luchtmengsels mee. Voor de korte en ondiepe duiken wordt meestal lucht of nitrox gebruikt. Nitrox is een mengsel van stikstof en zuurstof waarbij het zuurstofpercentage tussen de 21% en 40% zit. Wanneer er op grote dieptes wordt gedoken gebruikt men een op helium gebaseerd luchtmengsel. Trimix is bijvoorbeeld zo'n mengsel van stikstof, zuurstof en helium dat vaak wordt gebruikt voor duiken op grote diepte.

Maar waarom gebruikt de duiker luchtmengsels en niet gewoon lucht? De simpele reden is dat je veel langer kunt duiken. Als je een duik van 20 meter maakt met lucht, dan kun je ongeveer een uur onder water blijven. Met nitrox neemt deze tijd toe tot 2½ uur. Daarnaast geven veel duikers aan dat ze veel minder vermoeid zijn na een duik met nitrox dan met lucht. Het doel van het toevoegen van helium is het terugdringen van het percentage zuurstof en stikstof. Minder zuurstof verkleint de kans op zuurstofvergiftiging. Minder stikstof in de lucht betekent dat er ook minder in het lichaam wordt opgenomen en dit is beter tegen decompressieverschijnselen.



Decompressie

Bij het stijgen uit diep water moet men rekening houden met decompressie. Het stijgen moet langzaam gebeuren, anders loopt men risico op de caissonziekte. De zuurstof in de luchtmengsels wordt door je lichaam verbruikt, het stikstof stapelt zich echter op in je weefsels. Bij het stijgen neemt de omgevingsdruk af en daardoor wil het verzamelde stikstof uit de weefsels treden. Gebeurt dit langzaam, dan zal ook dit stikstof langzaam worden afgegeven aan het bloed en wordt het via de longen uitgeademd. Gaat de stijging sneller, dan zal niet al het stikstof op kunnen lossen en zal de vrijkomende stikstof belletjes beginnen te vormen. Wanneer de bellen te groot worden, dan kunnen ze in het lichaam voor grote problemen zorgen: ze belemmeren de bloedsomloop, wat ook wel bekend staat als embolie. Als zulke bellen in de hersenen ontstaan, kan dat zelfs dodelijk zijn.

Om dit te voorkomen moet bij zeer diepe duiken een decompressiestop ingelast worden. Vaak wordt dan puur zuurstof ingeademd om daarna weer sneller te kunnen stijgen. De caissonziekte heeft verschijnselen als jeuk, hoofdpijn, duizeligheid en pijn in de spieren en gewrichten. Als een duiker hier last van krijgt, dan moet hij zo snel mogelijk een decompressiestop in lassen.

De nieuwsgierigheid van mensen heeft voornamelijk geleid tot de ontwikkeling van de duikcilinder. Hoe dieper we willen, hoe meer techniek er bij komt kijken. Nieuwe ontwikkelingen op het gebied van duiken zijn technologieën die helemaal geen gebruik meer maken van perslucht. Een voorbeeld hiervan is ademen door opgeloste zuurstof uit het water te halen. Of deze technieken de toekomst hebben, zal de tijd ons leren. De grenzen van het duiken worden echter nog altijd bepaald door het menselijk lichaam. •

Vorig Breinwerk

DOOR DE REDACTIE

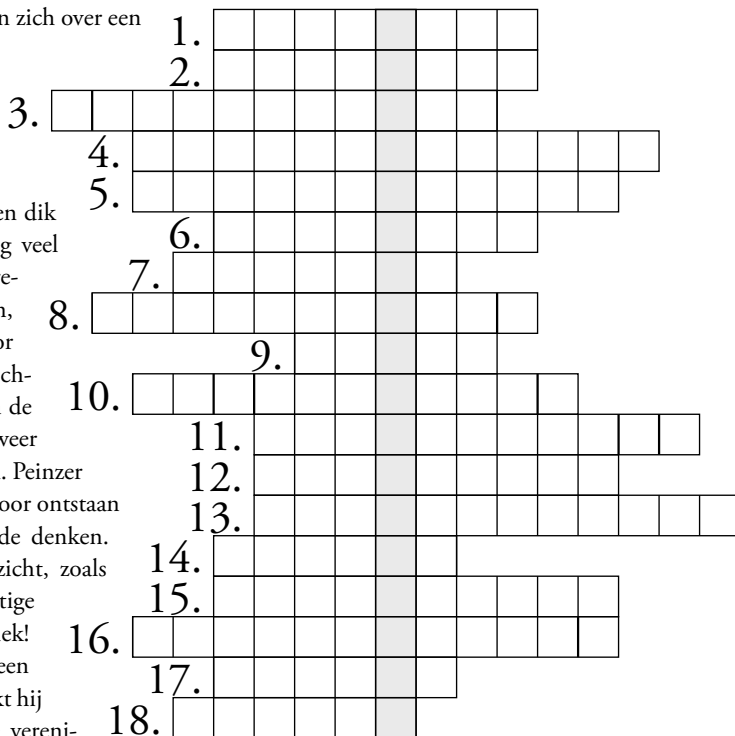
De 'moeilijkste sudoku ooit' leverde een redelijk aantal inzendingen op, dus ofwel de bedenker onderschat de mensen, ofwel hij overschat zichzelf met zijn sudokukunsten. De oplossing is hiernaast te vinden en uit de juiste inzendingen is Nelly Uitslag als winnaar uit de bus gekomen. Zij krijgt een sudokucube! •

1	4	5	3	2	7	6	9	8
8	3	9	6	5	4	1	2	7
6	7	2	9	1	8	5	4	3
4	9	6	1	8	5	3	7	2
2	1	8	4	7	3	9	5	6
7	5	3	2	9	6	4	8	1
3	6	7	5	4	2	8	1	9
9	8	4	7	6	1	2	3	5
5	2	1	8	3	9	7	6	4

Nieuw Breinwerk

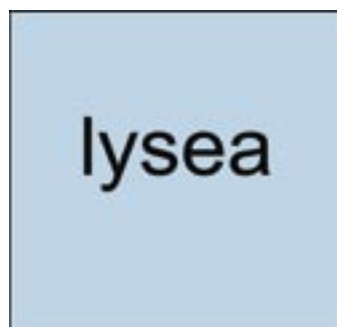
DOOR MARION DAM

Het is weer winter. Buiten dwarrelt de sneeuw naar beneden, terwijl professor Peinzer binnen warm bij de kachel zit en zich over een paar mooie differentiaalvergelijkingen buigt. Als hij er niet uitkomt, staat hij op en loopt naar het raam en merkt eens te meer dat zijn raam van enkel glas geen goede isolator is. Alles buiten is bedekt met een dik pak sneeuw en er lijken nog oneindig veel vlokken bij te komen. Het witte dek reflecteert het licht van de lantaarnpalen, die werken op elektriciteit die door zonnecellen gegenereerd wordt. Vanochtend was die warme ster nog wel aan de hemel te zien. In de middag was het weer plots omgeslagen in een sneeuwstorm. Peinzer kijkt naar de sneeuwduinen die hierdoor ontstaan zijn. Ze doen hem aan een sinusoiden denken. Er verschijnt een lachje op zijn gezicht, zoals altijd bij het denken aan die prachtige periodieke functies. Maar... Periodiek! Opeens schrikt hij. Daar moest hij een puzzel voor maken! Gelukkig, bedenkt hij zich, het breinwerk voor dat mooie verenigingsblad is al af. En hij hoopt dat de lezers hun brein moeten laten werken om het op te lossen. Zijn werk zit er gelukkig alweer op (z.o.z.).



Wat moet je doen?

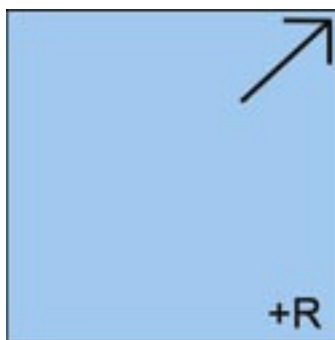
Het thema van deze puzzel is ‘wetenschap’ en we zijn op zoek naar woorden die met de basiskennis van bètavakken heeft te maken. Iets moeilijker dan ‘plus’ of ‘staartdeling’, maar makkelijker dan ‘data-acquisitiesysteem’. Hoe werkt het? Elk plaatje is een raadsel. Alles in het plaatje kan een hint zijn: positie, afbeelding, vorm... Een voorbeeldje: in het plaatje hiernaast zien we staan: ‘lysea.’ Dit kan ook gelezen worden als a na lyse. Hé! Analyse! Dat zou de oplossing wel eens kunnen zijn! De oplossingen kun je invullen in het schema op de vorige bladzijde, en de letters in de grijze kolom vormen een zin. Deze zin is het antwoord, maar ook de losse antwoorden van plaatjes leveren punten op! Stuur het antwoord voor 8 februari op naar perio@fmf.nl en maak kans op het Legospel Pirate Code. Dit is een soort Mastermind voor vier spelers van de welbekende bouwstenen, waarbij getest wordt wie de beste piraat is! •



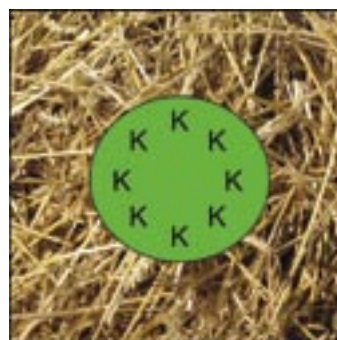
Voorbeeld



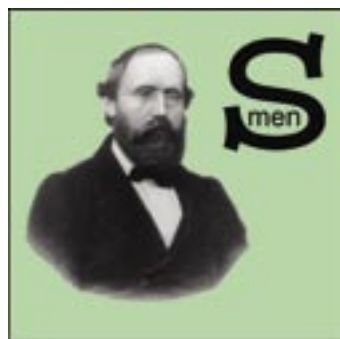
1



2



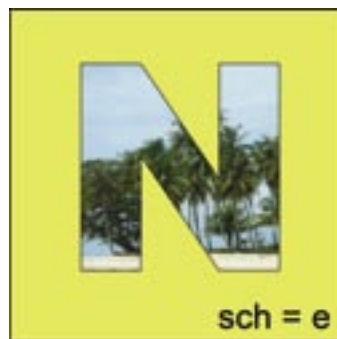
3



4

Nota	
1 munt	€ 1,-
2 kop	€ 2,-
1 munt	€ 1,-
P(mkkm) 1/16	

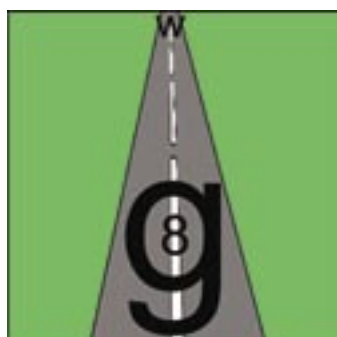
5



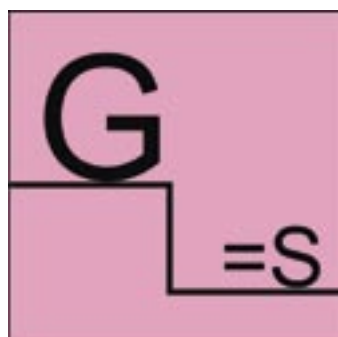
6



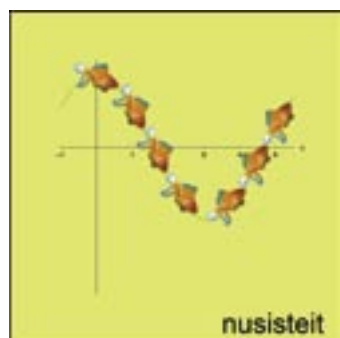
7



8



9



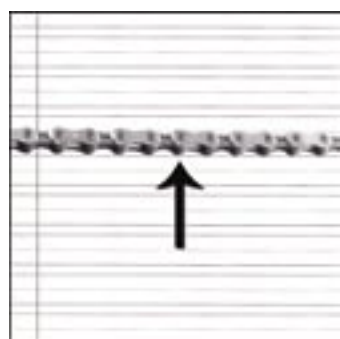
10



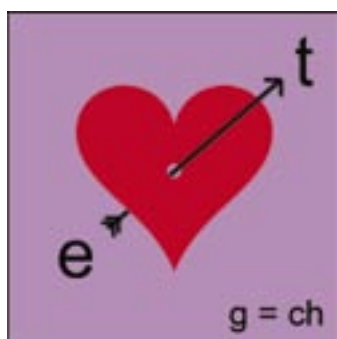
11



12



13



14



15



16



17



18



Schut Geometrische Meettechniek is een internationale organisatie met vijf vestigingen in Europa en de hoofdvestiging in Groningen. Het bedrijf is ISO 9001 gecertificeerd en gespecialiseerd in de ontwikkeling, productie en verkoop van precisie meetinstrumenten en -systemen.

Schut Geometrische Meettechniek is een bedrijf dat mensen met ideeën en initiatief waardeert. De bedrijfsstructuur is overzichtelijk en de sfeer is informeel met een "no nonsense" karakter.

Op de afdelingen voor technische verkoop, software support en ontwikkeling van onze 3D meetmachines werken mensen met een academische achtergrond. Hierbij gaat het om functies zoals **Sales Engineer**, **Software Support Engineer**, **Software Developer (C++)**, **Electronics Developer** en **Mechanical Engineer**.

Voor dergelijke functies zijn ook stageplaatsen beschikbaar, die eventueel uitzicht bieden op een baan.

Indien je geïnteresseerd bent, kun je altijd contact opnemen om een afspraak te maken voor een oriënterend gesprek op onze hoofdvestiging.

Open sollicitaties zijn ook zeer welkom. Voor echt talent is altijd ruimte.

Voor meer informatie kijk op www.Schut.com en Vacatures.Schut.com, of stuur een e-mail naar Sollicitatie@Schut.com.

